

Prova scritta di Matematica
c.l. in Scienze Naturali N.O.
4 luglio 2002

1) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n}{n^3 4^n},$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-------|
| a) converge | [V] | [F] |
| b) è irregolare | [V] | [F] |
| c) diverge | [V] | [F] |
| d) si può studiare il suo carattere utilizzando il criterio del rapporto | [V] | [F] . |

2) Data la funzione $f : [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = (x^2 - 8)e^{-x}, \quad \forall x \in [3, +\infty[,$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| a) f è continua in $[3, +\infty[$ | [V] | [F] |
| b) f è derivabile in $[3, +\infty[$ | [V] | [F] |
| c) $M = \frac{8}{e^4}$ è massimo assoluto per f in $[3, +\infty[$ | [V] | [F] |
| d) f non ha minimo assoluto | [V] | [F] |
| e) f è monotona in $[3, +\infty[$ | [V] | [F] |

3) Calcolare l'area della figura piana delimitata dalle parabole

$$y = 3x^2 \text{ e } y = 6x - 3x^2.$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
4 luglio 2002

1) Calcolare i seguenti due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 4}{x^3 + 4} ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x \lg 2} .$$

2) Data la funzione $f : [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = (x^2 - 8)e^{-x} \quad , \quad \forall x \in [3, +\infty[\quad ,$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| a) f è continua in $[3, +\infty[$ | [V] | [F] |
| b) f è derivabile in $[3, +\infty[$ | [V] | [F] |
| c) $M = \frac{8}{e^4}$ è massimo assoluto per f in $[3, +\infty[$ | [V] | [F] |
| d) f non ha minimo assoluto | [V] | [F] |
| e) f è monotona in $[3, +\infty[$ | [V] | [F] |

3) Calcolare l'area della figura piana delimitata dalle parabole

$$y = 3x^2 \text{ e } y = 6x - 3x^2.$$

Prova scritta di Matematica (N.O.)
c.l. in Scienze Naturali
19 luglio 2002

1) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{10^{3n}} ,$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| a) converge | [V] | [F] |
| b) è irregolare | [V] | [F] |
| c) diverge | [V] | [F] |
| d) ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000}{10^{3n}}$ | [V] | [F] |

2) Data la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = x + \frac{4}{x} , \quad \forall x \in]0, +\infty[,$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) f è continua in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| b) f è derivabile in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| c) f ha massimo assoluto in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| d) $m=4$ è minimo assoluto per f in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| e) f è integrabile in senso esteso in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^3 \left(\frac{3}{1+x^2} + \frac{2x+2}{x^2+x} \right) dx .$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
19 luglio 2002

1) Calcolare i seguenti due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} .$$

2) Data la funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = x + \frac{4}{x} , \quad \forall x \in]0, +\infty[,$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) f è continua in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| b) f è derivabile in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| c) f ha massimo assoluto in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| d) $m=4$ è minimo assoluto per f in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| e) f è integrabile in senso esteso in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^3 \left(\frac{3}{1+x^2} + \frac{2x+2}{x^2+x} \right) dx .$$

Prova scritta di Matematica (N.O.)
c.l. in Scienze Naturali
2 settembre 2002

1) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n + 8^n}{56^n},$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) converge | [V] | [F] |
| b) è irregolare | [V] | [F] |
| c) diverge | [V] | [F] |
| d) ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7^n + 8^n}{56^n}\right) 7^n$ | [V] | [F] |

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + 1} & , x > 0 \\ 1 & , x \leq 0 \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) f è continua in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| b) f è derivabile in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| c) $m=0$ è minimo assoluto per f in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{\ln x + x^6 + x \tan x}{x} \right) dx .$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
2 settembre 2002

1) Calcolare i seguenti due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x} \right) ,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) .$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + 1} & , x > 0 \\ 1 & , x \leq 0 \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) f è continua in \mathbb{R} [V] [F]
b) f è derivabile in \mathbb{R} [V] [F]
c) $m=0$ è minimo assoluto per f in \mathbb{R} [V] [F]
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$ [V] [F]

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{\ln x + x^6 + x \tan x}{x} \right) dx .$$

Prova scritta di Matematica (N.O.)
c.l. in Scienze Naturali
7 novembre 2002

1) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 1}},$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) converge [V] [F]
b) è irregolare [V] [F]
c) diverge [V] [F]
d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[7]{\frac{n^6 + n^3}{n^{15} + 1}} = 0$ [V] [F]

2) Data la funzione $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = 1 - |x^3 - 1|, \forall x \in [-1, 2].$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) f è continua in $[-1, 2]$ [V] [F]
b) f è derivabile in $[-1, 2]$ [V] [F]
c) $x=0$ è un punto di minimo relativo per f [V] [F]
d) $x=-1$ è un punto di minimo assoluto per f in $[-1, 2]$ [V] [F]
e) $x=1$ è un punto di massimo assoluto per f in $[-1, 2]$ [V] [F]
f) f è monotona in $[-1, 2]$ [V] [F]
g) f è integrabile in $[-1, 2]$ [V] [F]
h) f è una funzione dispari in $[-1, 1]$ [V] [F]

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 \left(\frac{3x}{1+x^2} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) dx .$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
7 novembre 2002

1) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^3}{2}\pi - x^3 \arctan \frac{1}{x^2} - x \sin x^2}{9 \sin^3 x}$$

2) Data la funzione $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = 1 - |x^3 - 1|, \forall x \in [-1, 2].$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) f è continua in $[-1, 2]$ | [V] | [F] |
| b) f è derivabile in $[-1, 2]$ | [V] | [F] |
| c) $x=0$ è un punto di minimo relativo per f | [V] | [F] |
| d) $x=-1$ è un punto di minimo assoluto per f in $[-1, 2]$ | [V] | [F] |
| e) $x=1$ è un punto di massimo assoluto per f in $[-1, 2]$ | [V] | [F] |
| f) f è monotona in $[-1, 2]$ | [V] | [F] |
| g) f è integrabile in $[-1, 2]$ | [V] | [F] |
| h) f è una funzione dispari in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 \left(\frac{3x}{1+x^2} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) dx .$$

Prova scritta di Matematica (N.O.)
c.l. in Scienze Naturali
19 dicembre 2002

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{1+n\sqrt{1+n^3}}$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) la serie converge perchè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n\sqrt{1+n^3}} = 0$ [V] [F]
b) la serie diverge [V] [F]
c) la serie è indeterminata [V] [F]
d) la serie ha lo stesso comportamento della $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ [V] [F]

2) Data la funzione $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-3}$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) l'insieme di definizione della funzione f è $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ [V] [F]
b) f' ha segno costante [V] [F]
c) f ha minimo assoluto in $[0, 1]$ [V] [F]
d) f è limitata nell'insieme ove è definita [V] [F]
e) f è strettamente crescente in $[-1, 1]$ [V] [F]

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \left(\frac{x+1}{x+3} + (3x+2)^{-2/3} \right) dx$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
19 dicembre 2002

1) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 5x^3}{x^4 + 2x^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^4 - n^2 + 5n}{n^3 - n + 5} \right) \sin \frac{2}{n}$$

2) Data la funzione $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-3}$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| a) l'insieme di definizione della funzione f è $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ | [V] | [F] |
| b) f' ha segno costante | [V] | [F] |
| c) f ha minimo assoluto in $[0, 1]$ | [V] | [F] |
| d) f è limitata nell'insieme ove è definita | [V] | [F] |
| e) f è strettamente crescente in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \left(\frac{x+1}{x+3} + (3x+2)^{-2/3} \right) dx$$

Prova scritta di Matematica (N.O.)
c.l. in Scienze Naturali
20 gennaio 2003

1) Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}{4^n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|-----------------|-----|-----|
| a) converge | [V] | [F] |
| b) diverge | [V] | [F] |
| c) è irregolare | [V] | [F] |

d) posto $a_n = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}{4^n}$, la serie data

ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n)$ [V] [F]

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) f è continua in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| b) f è crescente in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| c) $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f | [V] | [F] |
| d) $x = -2$ è un punto di massimo relativo per f | [V] | [F] |
| f) f ha minimo assoluto in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| g) f è integrabile in $[1, 2]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx .$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
20 gennaio 2003

1) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} + \frac{2x+1}{x+2} \right)$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) f è continua in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| b) f è crescente in $]0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| c) $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f | [V] | [F] |
| d) $x = -2$ è un punto di massimo relativo per f | [V] | [F] |
| f) f ha minimo assoluto in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| g) f è integrabile in $[1, 2]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx .$$

Prova scritta di Matematica (N.O.)
 c.l. in Scienze Naturali
 4 febbraio 2003

1) Per la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+4n}{5n^3+5n^2}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| a) converge | [V] | [F] |
| b) diverge a $+\infty$ | [V] | [F] |
| c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+4n}{5n^3+5n^2} = 0$ e la serie potrebbe convergere | [V] | [F] |
| d) la somma della serie è $\frac{1}{2}$ | [V] | [F] |

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \lg 4 \frac{e^x - 1}{1 + x} + 2, \quad \forall x \geq 0$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| ii) f è crescente in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| iii) f è derivabile in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| iv) 2 è minimo assoluto per f in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| v) f non ha massimo assoluto | [V] | [F] |
| vi) f è R-integrabile in $[0, 1]$ | [V] | [F] |
| vii) f è G-integrabile in $[0, +\infty[$
(integrabile in senso improprio) | [V] | [F] |

3) Calcolare i seguenti integrali

$$I_1 = \int \left(2x^{\frac{3}{5}} - \frac{3}{2+x^2} \right) dx$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{\sin(2 \lg x)}{x} dx$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
4 febbraio 2003

1) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^6}{4-n} + \frac{n^2+n}{3n^2+\sqrt{n}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(2x + 3 + \frac{x+1}{\sin(x+1)} \right)$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \lg 4 \frac{e^x - 1}{1+x} + 2, \quad \forall x \geq 0$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| ii) f è crescente in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| iii) f è derivabile in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| iv) 2 è minimo assoluto per f in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| v) f non ha massimo assoluto | [V] | [F] |
| vi) f è R-integrabile in $[0, 1]$ | [V] | [F] |
| vii) f è G-integrabile in $[0, +\infty[$
(integrabile in senso improprio) | [V] | [F] |

3) Calcolare i seguenti integrali

$$I_1 = \int \left(2x^{\frac{3}{5}} - \frac{3}{2+x^2} \right) dx$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{\sin(2 \lg x)}{x} dx$$

Prova scritta di Matematica (N.O.)
c.l. in Scienze Naturali
20 febbraio 2003

1) Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ stabilire se le seguenti affermazioni

sono vere o false:

- a) converge [V] [F]
b) diverge a $+\infty$ [V] [F]
c) è irregolare [V] [F]
d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = 0$ [V] [F]

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} & , x \neq \pm 2 \\ 3 & , x = \pm 2 \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) f è pari in \mathbb{R} [V] [F]
ii) f è continua in \mathbb{R} [V] [F]
iii) f è decrescente in $[0, 2[$ [V] [F]
iv) f è decrescente in $[0, +\infty[$ [V] [F]
v) $x = 0$ è un punto di massimo relativo [V] [F]
vi) f ha massimo assoluto in $[-2, 2]$ [V] [F]
vii) f non ha minimo assoluto in $[-2, 2]$ [V] [F]
viii) f è R-integrabile in $[0, 1]$ [V] [F]

3) Calcolare i seguenti integrali

$$I_1 = \int_1^2 \left(\frac{\arctan x}{1 + x^2} - \frac{\lg(3x)}{x} \right) dx$$

$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{4}{x \lg x} dx$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
20 febbraio 2003

1) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + n^3 + 3n^5}{n^2 + n^5}$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} & , x \neq \pm 2 \\ 3 & , x = \pm 2 \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è pari in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| ii) f è continua in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| iii) f è decrescente in $[0, 2[$ | [V] | [F] |
| iv) f è decrescente in $[0, +\infty[$ | [V] | [F] |
| v) $x = 0$ è un punto di massimo relativo | [V] | [F] |
| vi) f ha massimo assoluto in $[-2, 2]$ | [V] | [F] |
| vii) f non ha minimo assoluto in $[-2, 2]$ | [V] | [F] |
| viii) f è R-integrabile in $[0, 1]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare i seguenti integrali

$$I_1 = \int_1^2 \left(\frac{\arctan x}{1 + x^2} - \frac{\lg(3x)}{x} \right) dx$$

$$I_2 = \int_2^4 \frac{4}{x \lg x} dx$$

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
11 aprile 2003

1) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + 8n + 5}{5n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + 3n + 1}{3n^3 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \sin x}$$

2) Data la funzione $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in [1, 2] \\ \frac{x^2}{4} + 1 & , x \in]2, 3] \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| i) f è continua in $[1, 3]$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $[1, 3]$ | [V] | [F] |
| iii) esiste un punto $\bar{x} \in [1, 3]$ ove è $f'(\bar{x}) < 0$ | [V] | [F] |
| iv) f ha un punto di minimo relativo in $[1, 3]$ | [V] | [F] |
| v) f non ha punti di massimo relativo in $[1, 3]$ | [V] | [F] |
| vi) f è integrabile in $[1, 3]$ | [V] | [F] |
| vii) è $\int_1^3 f(t) dt = \frac{49}{12}$ | [V] | [F] |

3) Calcolare:

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx$$

Prova scritta di Matematica (N.O.)
c.l. in Scienze Naturali - 28 aprile 2003

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(7 \frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) la serie converge | [V] | [F] |
| b) la serie è divergente | [V] | [F] |
| c) la serie è indeterminata | [V] | [F] |
| d) la serie ha lo stesso comportamento | | |

della $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right)^n$ [V] [F]

2) Data la funzione $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, 1] \\ 2 & , x \in]1, \frac{3}{2}] \\ \frac{8x^2}{9} & , x \in]\frac{3}{2}, 4] \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| iii) $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per f in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| v) f non ha massimo assoluto in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| vi) f è monotona in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| vii) f è integrabile in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| viii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\sin x} = 2$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{3/2} f(x) dx$$

ove f è la funzione definita nell'esercizio 2).

Provare che il valore di tale integrale definito è uguale al valore dell'area del trapezio rettangolo delimitato dal grafico della funzione f , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \frac{3}{2}$.

Prova scritta di Matematica (V.O.)
c.l. in Scienze Naturali
28 aprile 2003

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{8x^4 + \sin^4 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x \ln x - 2 \ln x}$$

2) Data la funzione $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, 1] \\ 2 & , x \in]1, \frac{3}{2}] \\ \frac{8x^2}{9} & , x \in]\frac{3}{2}, 4] \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| iii) $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per f in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| v) f non ha massimo assoluto in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| vi) f è monotona in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| vii) f è integrabile in $[0, 4]$ | [V] | [F] |
| viii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\sin x} = 2$ | [V] | [F] |

3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{3/2} f(x) dx$$

ove f è la funzione definita nell'esercizio 2).

Provare che il valore di tale integrale definito è uguale al valore dell'area del trapezio rettangolo delimitato dal grafico della funzione f , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \frac{3}{2}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di Matematica – N.O.
C.dL. in Scienze Naturali - 16 Giugno 2003

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| a) la serie converge | [V] | [F] |
| b) la serie è divergente | [V] | [F] |
| c) la serie è indeterminata | [V] | [F] |
| d) la serie ha lo stesso comportamento della $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ | [V] | [F] |

2) Data la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = |2x + 1|$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| i) f è continua in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |
| iii) f ammette un punto di minimo assoluto in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |
| v) f ammette un punto di massimo assoluto in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |
| vi) f è monotona in $[0, 1]$ | [V] | [F] |
| vii) f è integrabile in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx,$$

ove f è la funzione definita nell'esercizio 2), e

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \log x}.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di
Istituzioni di Matematiche – V.O.
C.d.L. in Scienze Naturali - 16 Giugno 2003

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n - \sin n], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

2) Data la funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = |2x + 1|$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| i) f è continua in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |
| iii) f ammette un punto di minimo assoluto in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |
| v) f ammette un punto di massimo assoluto in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |
| vi) f è monotona in $[0, 1]$ | [V] | [F] |
| vii) f è integrabile in $[-1, 1]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx,$$

ove f è la funzione definita nell'esercizio 2), e

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \log x}.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di Matematica – N.O.
C.L. in Scienze Naturali - 1⁰ Luglio 2003

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) la serie converge | [V] | [F] |
| b) la serie è divergente | [V] | [F] |
| c) la serie è indeterminata | [V] | [F] |
| d) la serie ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ | [V] | [F] |

2) Data la funzione $f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \log(x + 1)$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| iii) f è strettamente crescente in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| iv) $x = 0$ è l'unico zero di f in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| v) f ammette un punto di massimo assoluto in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x + 1)}{x} = 1$ | [V] | [F] |
| vii) f è integrabile in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx,$$

ove f è la funzione definita nell'esercizio 2), e

$$\int_{-\infty}^{\log(\pi/4)} e^x \tan e^x dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche – V.O.
C.L. in Scienze Naturali - 1⁰ Luglio 2003

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + e^{-2n})^{e^n}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + x - 20}{2x^5 - x^3 + 1} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{3}{x}.$$

2) Data la funzione $f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \log(x + 1)$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| iii) f è strettamente crescente in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| iv) $x = 0$ è l'unico zero di f in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| v) f ammette un punto di massimo assoluto in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |
| vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x + 1)}{x} = 1$ | [V] | [F] |
| vii) f è integrabile in $(-1, 1]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx,$$

ove f è la funzione definita nell'esercizio 2), e

$$\int_{-\infty}^{\log(\pi/4)} e^x \tan e^x dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di Matematica – N.O.
C.L. in Scienze Naturali - 16 Luglio 2003

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \dots + n}{1 + n^4}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) la serie converge | [V] | [F] |
| b) la serie è divergente | [V] | [F] |
| c) la serie è indeterminata | [V] | [F] |
| d) la serie ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ | [V] | [F] |

2) Data la funzione $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| i) f è continua in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| iii) f è strettamente crescente in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1$ | [V] | [F] |
| v) f ammette un punto di massimo assoluto in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| vi) f è integrabile ma non sommabile in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^1 2x \arctan x \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche – V.O.
C.L. in Scienze Naturali - 16 Luglio 2003

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x}.$$

2) Data la funzione $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$
stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| i) f è continua in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| iii) f è strettamente crescente in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1$ | [V] | [F] |
| v) f ammette un punto di massimo assoluto in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| vi) f è integrabile ma non sommabile in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^1 2x \arctan x \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} \, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di **Matematica** – N.O.
C.L. in Scienze Naturali - 4 Settembre 2003

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2} \cos \frac{1}{n}\right)^n$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| a) la serie converge | [V] | [F] |
| b) la serie è divergente | [V] | [F] |
| c) la serie è indeterminata | [V] | [F] |
| d) la serie ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n}$ | [V] | [F] |

2) Data la funzione $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in $(1, \infty)$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $(1, \infty)$ | [V] | [F] |
| iii) $x = e^2$ è un punto di minimo assoluto | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ | [V] | [F] |
| v) il codominio di f è $[e/2, \infty)$ | [V] | [F] |
| vi) f è integrabile ma non sommabile in $(1, e]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 9} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di Istituzioni di Matematiche – V.O.
C.L. in Scienze Naturali - 4 Settembre 2003**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 1} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + 1)}{(\sin 2x)^2}.$$

2) Data la funzione $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in $(1, \infty)$ | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in $(1, \infty)$ | [V] | [F] |
| iii) $x = e^2$ è un punto di minimo assoluto | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ | [V] | [F] |
| v) il codominio di f è $[e/2, \infty)$ | [V] | [F] |
| vi) f è integrabile ma non sommabile in $(1, e]$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 9} dx \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di Matematica – N.O.
C.L. in Scienze Naturali - 24 Settembre 2003

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos n}{n^{5/2} + n^{1/5}}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| a) la serie converge | [V] | [F] |
| b) la serie è divergente | [V] | [F] |
| c) la serie è indeterminata | [V] | [F] |
| d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos n}{n^{5/2} + n^{1/5}} = 1$ | [V] | [F] |

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, definita da: $f(x) = \frac{\log^2 x}{x}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è derivabile in \mathbb{R}^+ | [V] | [F] |
| ii) f ha due punti critici in \mathbb{R}^+ | [V] | [F] |
| iii) $x = e^2$ è un punto di minimo assoluto | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ | [V] | [F] |
| v) il valore minimo di f è 0 | [V] | [F] |
| vi) f è integrabile in $[1, e]$ con $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{3}$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(1 + \log^2 x)} \quad \text{e} \quad \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche – V.O.
C.L. in Scienze Naturali - 24 Settembre 2003

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^{1/3}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n^2}{5^n} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + 2x - x^2}{1 + x}.$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, definita da: $f(x) = \frac{\log^2 x}{x}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è derivabile in \mathbb{R}^+ | [V] | [F] |
| ii) f ha due punti critici in \mathbb{R}^+ | [V] | [F] |
| iii) $x = e^2$ è un punto di minimo assoluto | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ | [V] | [F] |
| v) il valore minimo di f è 0 | [V] | [F] |
| vi) f è integrabile in $[1, e]$ con $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{3}$ | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x(1 + \log^2 x)} \quad \text{e} \quad \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!