

* * * * *

Compiti d'Esame – A.A. 2003/2004

* * * * *

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O. C.L. in Scienze Naturali - 19 Gennaio 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) la serie converge [V] [F]
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ [V] [F]
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n > 2$ [V] [F]
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n = 1$ [V] [F]

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, definita da: $f(x) = \frac{\log \sqrt{x}}{x}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) f è derivabile in \mathbb{R}^+ [V] [F]
- ii) l'asse delle y è un asintoto verticale per f [V] [F]
- iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ [V] [F]
- iv) $1/2e$ è valore massimo per f in \mathbb{R}^+ [V] [F]
- v) f non ammette minimo assoluto in \mathbb{R}^+ [V] [F]
- vi) f ammette massimo assoluto in $[4e, \infty)$ [V] [F]

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_1^e f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\log \pi} e^x \cdot \cos(2e^x) dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali - 19 Gennaio 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 2^{x/2}) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{-n}.$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, definita da: $f(x) = \frac{\log \sqrt{x}}{x}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | |
|---|---------|
| i) f è derivabile in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| ii) l'asse delle y è un asintoto verticale per f | [V] [F] |
| iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ | [V] [F] |
| iv) $1/2e$ è valore massimo per f in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| v) f non ammette minimo assoluto in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| vi) f ammette massimo assoluto in $[4e, \infty)$ | [V] [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_1^e f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\log \pi} e^x \cdot \cos(2e^x) dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 3 Febbraio 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} \left[2 \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \right]^{-n}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) la serie converge [V] [F]

(b) la serie converge semplicemente [V] [F]

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \right]^{-n} = 2$ [V] [F]

(d) la serie data ha lo stesso carattere di $\sum_{n=2}^{\infty} (-a_n)$, ove

$a_n = \left[2 \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \right]^{-n}$ [V] [F]

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da: $f(x) = (x + 1)e^x$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è derivabile in \mathbb{R} [V] [F]

ii) $-\frac{1}{e^2}$ è valore minimo di f in \mathbb{R} [V] [F]

iii) f ammette massimo assoluto in \mathbb{R}^+ [V] [F]

iv) f è crescente in $[-2, \infty)$ [V] [F]

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$ [V] [F]

vi) $\int_0^{\infty} f(x) dx = 0$, [V] [F]

vii) $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{e}$, [V] [F]

3) Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2}{x^3 - 1} dx$$

e dire se il risultato ottenuto è un numero positivo o negativo.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 3 Febbraio 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x \sin x + e^{x^2} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x \log x - \log x} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + n}{n^2 + 4}.$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da: $f(x) = (x+1)e^x$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) f è derivabile in \mathbb{R} [V] [F]
- ii) $-\frac{1}{e^2}$ è valore minimo di f in \mathbb{R} [V] [F]
- iii) f ammette massimo assoluto in \mathbb{R}^+ [V] [F]
- iv) f è crescente in $[-2, \infty)$ [V] [F]
- v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$ [V] [F]
- vi) $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0$, [V] [F]
- vii) $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{e}$, [V] [F]

3) Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2}{x^3 - 1} dx$$

e dire se il risultato ottenuto è un numero positivo o negativo.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 20 Febbraio 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dove $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | |
|---|---------|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$ | [V] [F] |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ | [V] [F] |
| (c) la serie data è convergente | [V] [F] |
| (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \cdot 2^{-n}}{4^n} = 2$, | [V] [F] |

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definita da: $f(x) = (\sin x) \cdot (\log x)$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | |
|---|---------|
| i) f è estendibile con continuità in $x = 0$, ponendo $f(0) = 0$ | [V] [F] |
| ii) f è derivabile in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| iii) $f(0) = f(1) = 0$ e f ammette un punto critico x_1 in $]0, 1[$,
che è di minimo locale per f in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| iv) $f(1) = f(\pi) = 0$ e f ammette un punto critico x_2 in $]1, \pi[$,
che è di massimo locale per f in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| v) f ha infiniti punti critici in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| vi) f non è limitata ne' inferiormente ne' superiormente in \mathbb{R}^+ . | [V] [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 20 Febbraio 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2x^2 + 1)}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x - 1}{\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2 \sin x}{\cos x - 10x}.$$

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definita da: $f(x) = (\sin x) \cdot (\log x)$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | |
|---|---------|
| i) f è estendibile con continuità in $x = 0$, ponendo $f(0) = 0$ | [V] [F] |
| ii) f è derivabile in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| iii) $f(0) = f(1) = 0$ e f ammette un punto critico x_1 in $]0, 1[$,
che è di minimo locale per f in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| iv) $f(1) = f(\pi) = 0$ e f ammette un punto critico x_2 in $]1, \pi[$,
che è di massimo locale per f in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| v) f ha infiniti punti critici in \mathbb{R}^+ | [V] [F] |
| vi) f non è limitata né inferiormente né superiormente in \mathbb{R}^+ . | [V] [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 2 Aprile 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ [V] [F]
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ [V] [F]
(c) la serie data è convergente [V] [F]
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 2$. [V] [F]

2) Data la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = (1, \infty)$, definita da: $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) f è positiva in I [V] [F]
ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{2}$, cioè f è estendibile con continuità in $x = 1$ [V] [F]
iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ [V] [F]
iv) f è derivabile in I [V] [F]
v) f è strettamente decrescente in I [V] [F]
vi) f è limitata inferiormente e superiormente in I . [V] [F]

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 2 Aprile 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x+1| - |x-1|}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 + \sqrt{\sqrt{1-x} - x}}}{\sqrt{1-x}}.$$

2) Data la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = (1, \infty)$, definita da: $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| i) f è positiva in I | [V] | [F] |
| ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{2}$, cioè f è estendibile con continuità in $x = 1$ | [V] | [F] |
| iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ | [V] | [F] |
| iv) f è derivabile in I | [V] | [F] |
| v) f è strettamente decrescente in I | [V] | [F] |
| vi) f è limitata inferiormente e superiormente in I . | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 14 Maggio 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{2^n + n^2}{3^n + 5n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$ [V] [F]
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3}$ [V] [F]
(c) la serie data è convergente [V] [F]
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = 6$. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) il dominio D di f è $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ [V] [F]
ii) $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali [V] [F]
iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ [V] [F]
iv) f è derivabile in D [V] [F]
v) f è strettamente decrescente in $(1, \infty)$ [V] [F]
vi) $f(1/e^2) = 1$ e $f'(1/e^2) = 0$ [V] [F]
vii) $\int_0^{1/e} f(x) dx = 1$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_e^{\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^4 \frac{dx}{1 + 2\sqrt{x}}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 14 Maggio 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(5x+1) + \tan 6x}{\sin^2 \sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos x - e^x) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^3 e^n}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | |
|---|---------|
| i) il dominio D di f è $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ | [V] [F] |
| ii) $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali | [V] [F] |
| iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ | [V] [F] |
| iv) f è derivabile in D | [V] [F] |
| v) f è strettamente decrescente in $(1, \infty)$ | [V] [F] |
| vi) $f(1/e^2) = 1$ e $f'(1/e^2) = 0$ | [V] [F] |
| vii) $\int_0^{1/e} f(x) dx = 1$. | [V] [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_e^\infty f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^4 \frac{dx}{1 + 2\sqrt{x}}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 16 Giugno 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ [V] [F]
(b) $a_n \sim n^{-3}$ per $n \rightarrow \infty$ [V] [F]
(c) la serie data è convergente [V] [F]
(d) $\sum_{n=2}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{16}$. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x - \arctan x + 1$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) f è dispari in \mathbb{R} [V] [F]
ii) f è derivabile in \mathbb{R} [V] [F]
iii) f è strettamente crescente in \mathbb{R} [V] [F]
iv) $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \mp\infty$ [V] [F]
v) f è invertibile in \mathbb{R} [V] [F]
vi) il dominio di f^{-1} è \mathbb{R} [V] [F]
vii) $x = 0$ è un punto di flesso. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 16 Giugno 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-|x-2|}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n \sqrt[n]{e} - n).$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x - \arctan x + 1$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| i) f è dispari in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| iii) f è strettamente crescente in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \mp\infty$ | [V] | [F] |
| v) f è invertibile in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| vi) il dominio di f^{-1} è \mathbb{R} | [V] | [F] |
| vii) $x = 0$ è un punto di flesso. | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 2 Luglio 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{n^3 \sin n}{n!}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ [V] [F]
(b) la serie data non converge assolutamente [V] [F]
(c) la serie data è convergente [V] [F]
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{e-1}$. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x - \log(x^2 + 1) + 1$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) è derivabile in \mathbb{R} [V] [F]
ii) f è strettamente decrescente in \mathbb{R} [V] [F]
iii) f è strettamente crescente in \mathbb{R} [V] [F]
iv) $x = 0$ è un punto di flesso [V] [F]
v) $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \mp\infty$ [V] [F]
vi) f è invertibile in \mathbb{R} [V] [F]
vii) il dominio di f^{-1} è \mathbb{R}^+ . [V] [F]

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^1 \arctan \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \log^2 x dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 2 Luglio 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + \log(5x + 1) - 1}{\sin 4x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + \log x^2 + x}{x^2} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 3)^n}{n!}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x - \log(x^2 + 1) + 1$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) è derivabile in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| ii) f è strettamente decrescente in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| iii) f è strettamente crescente in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| iv) $x = 0$ è un punto di flesso | [V] | [F] |
| v) $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \mp\infty$ | [V] | [F] |
| vi) f è invertibile in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| vii) il dominio di f^{-1} è \mathbb{R}^+ . | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^1 \arctan \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \log^2 x dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 19 Luglio 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{n!}{n^{2n}}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (a) $n \mapsto a_n$ è una successione strettamente decrescente [V] [F]
(b) la serie data è divergente [V] [F]
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$ [V] [F]
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \dots + n}{n^4}$ è asintotica a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \arctan \frac{2x}{x^2 + 1}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) f è pari in \mathbb{R} [V] [F]
ii) f è derivabile in \mathbb{R} [V] [F]
iii) f è strettamente decrescente in $(1, \infty)$ [V] [F]
iv) $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 0$ [V] [F]
v) la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f [V] [F]
vi) f è limitata in \mathbb{R} [V] [F]
vii) $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -1$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \log \frac{1-x}{x} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 19 Luglio 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + x^2 + x}{5^x + \cos x + 7x^7} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + n}{2^n}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \arctan \frac{2x}{x^2 + 1}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | |
|---|---------|
| i) f è pari in \mathbb{R} | [V] [F] |
| ii) f è derivabile in \mathbb{R} | [V] [F] |
| iii) f è strettamente decrescente in $(1, \infty)$ | [V] [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} f(x) = 0$ | [V] [F] |
| v) la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f | [V] [F] |
| vi) f è limitata in \mathbb{R} | [V] [F] |
| vii) $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -1$. | [V] [F] |

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \log \frac{1-x}{x} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 6 Settembre 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} + 2^n}{2n^2 + 3^n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (a) la serie data ha lo stesso carattere della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ [V] [F]
(b) la serie data è anch'essa una serie geometrica [V] [F]
(c) la serie data è divergente [V] [F]
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 5$. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x^2 \log |x|$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- i) f è continua in \mathbb{R} [V] [F]
ii) f è pari in \mathbb{R} [V] [F]
iii) $f(\mp 1) = 1$ [V] [F]
iv) $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} f(x) = 0$ [V] [F]
v) f è derivabile in \mathbb{R} e $f'(0) = 0$ [V] [F]
vi) f è strettamente decrescente in $[1, \infty)$ [V] [F]
vii) $\max_{[-1,1]} f(x) = 0$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-1}^1 x^2 \log |x| dx \quad \text{e} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 6 Settembre 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x + x^3}{x^2 + \sin x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x^2}{5x} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3 + \cos 3n)^n}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x^2 \log |x|$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | | | |
|---|--|-----|--|-----|
| i) f è continua in \mathbb{R} | | [V] | | [F] |
| ii) f è pari in \mathbb{R} | | [V] | | [F] |
| iii) $f(\mp 1) = 1$ | | [V] | | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} f(x) = 0$ | | [V] | | [F] |
| v) f è derivabile in \mathbb{R} e $f'(0) = 0$ | | [V] | | [F] |
| vi) f è strettamente decrescente in $[1, \infty)$ | | [V] | | [F] |
| vii) $\max_{[-1,1]} f(x) = 0$. | | [V] | | [F] |

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-1}^1 x^2 \log |x| dx \quad \text{e} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 24 Settembre 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| (a) la serie data è una serie geometrica | [V] | [F] |
| (b) la serie data è divergente | [V] | [F] |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n^2} = 1$ | [V] | [F] |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$. | [V] | [F] |

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x \log x$ per $x > 0$ e $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in \mathbb{R}_0^+ | [V] | [F] |
| ii) $f(1) = 0$ | [V] | [F] |
| iii) f ha un punto critico in $[0, 1]$ | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 1$ | [V] | [F] |
| v) f è derivabile in \mathbb{R}^+ | [V] | [F] |
| vi) f è strettamente decrescente in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| vii) $\max_{[0,1]} f(x) = 0$. | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_0^1 x \log x \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 24 Settembre 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^3 + \cos x^2) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x \log x$ per $x > 0$ e $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) f è continua in \mathbb{R}_0^+ | [V] | [F] |
| ii) $f(1) = 0$ | [V] | [F] |
| iii) f ha un punto critico in $[0, 1]$ | [V] | [F] |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 1$ | [V] | [F] |
| v) f è derivabile in \mathbb{R}^+ | [V] | [F] |
| vi) f è strettamente decrescente in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| vii) $\max_{[0,1]} f(x) = 0$. | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_0^1 x \log x \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 17 Dicembre 2004

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n = 3^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|---|-----|-----|
| (a) la serie data è una serie geometrica | [V] | [F] |
| (b) la serie data è divergente | [V] | [F] |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ | [V] | [F] |
| (d) la somma della serie è minore della somma della serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$. | [V] | [F] |

2) Data la funzione definita da: $f(x) = xe^{-x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | | |
|--|-----|-----|
| i) dispari in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| ii) f è derivabile in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ | [V] | [F] |
| iv) f ha un un minimo e un massimo assoluto in \mathbb{R} | [V] | [F] |
| v) f è strettamente decrescente in $[1, \infty)$ | [V] | [F] |
| vi) f è strettamente crescente in $[0, 1]$ | [V] | [F] |
| vii) l'area della regione piana compresa tra il grafico di f e l'asse delle x è 1. | [V] | [F] |

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-1}^1 \log(1 - x^2) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

**Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 17 Dicembre 2004**

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 + x^4 + \sin x^2) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x^2}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = xe^{-x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- | | |
|--|---------|
| i) dispari in \mathbb{R} | [V] [F] |
| ii) f è derivabile in \mathbb{R} | [V] [F] |
| iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ | [V] [F] |
| iv) f ha un un minimo e un massimo assoluto in \mathbb{R} | [V] [F] |
| v) f è strettamente decrescente in $[1, \infty)$ | [V] [F] |
| vi) f è strettamente crescente in $[0, 1]$ | [V] [F] |
| vii) l'area della regione piana compresa tra il grafico di f e l'asse delle x è 1. | [V] [F] |

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-1}^1 \log(1 - x^2) dx \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!