❀ ❀

Compiti d'Esame – A.A. 2004/2005

❀ ❀

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 17 Gennaio 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n = \dfrac{n^2+3n}{2^n}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a)	la serie data è una serie geometrica	[V]	[F]
(b)	la serie data è divergente	[V]	[F]
(c)	$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$	[V]	[F]
(d)	$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1.$	[V]	[F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \arctan \dfrac{x^2}{1+x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è pari in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
ii)	f è derivabile in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
iii)	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$	[V]	[F]
iv)	f ha un minimo assoluto in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
v)	f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$	[V]	[F]
vi)	$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$	[V]	[F]
vii)	$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_0^{\pi/4} \arctan x \, dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} \frac{\log x - 1}{x^2} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 17 Gennaio 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2-|x|}, \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+3x+2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right).$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \arctan\dfrac{x^2}{1+x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è pari in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
ii)	f è derivabile in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
iii)	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$	[V]	[F]
iv)	f ha un minimo assoluto in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
v)	f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$	[V]	[F]
vi)	$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$	[V]	[F]
vii)	$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_0^{\pi/4} \arctan x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} \frac{\log x - 1}{x^2}dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 2 Febbraio 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{n^3 + n!}{3^n + n!}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} = 0$ [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ [V] [F]

(c) $a_n \sim 1$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(d) la serie assegnata è divergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = e^{-(x^2+1)}$ per $x \in \mathbb{R}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è negativa in $\mathbb{R}$ [V] [F]
ii) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]
iii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]
iv) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]
v) f ha un minimo assoluto in $\mathbb{R}$ [V] [F]
vi) f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}_0^+$ [V] [F]
vii) $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{e}$ [V] [F]
viii) $f(x) \leq e^{-2x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{e} \frac{1 - \log x}{\sqrt{x}} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 2 Febbraio 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x^5 - x^2|x|}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2\log(x+1) + 1 - e^{x^2}}{\sin x}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = e^{-(x^2+1)}$ per $x \in \mathbb{R}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è negativa in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
ii)	f è pari in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
iii)	f è derivabile in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
iv)	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$	[V]	[F]
v)	f ha un minimo assoluto in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
vi)	f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}_0^+$	[V]	[F]
vii)	$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{e}$	[V]	[F]
viii)	$f(x) \le e^{-2x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_0^\infty e^{-2x}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^e \frac{1-\log x}{\sqrt{x}}dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 18 Febbraio 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \dfrac{n^3 + \log n + \sin n}{2^n + n!}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $\lim_{n\to\infty} (n^3 + \log n + \sin n) = \infty$ [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$ [V] [F]

(c) $a_n \sim \dfrac{n^3}{n!}$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(d) la serie assegnata è divergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) disegnare il grafico di f e dire se f è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dall'asse delle y e dal grafico di f è 2 [V] [F]

iii) f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1,\ 2\}$ [V] [F]

iv) f è monotona non–crescente in $\mathbb{R}$ [V] [F]

v) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{e^x} = 0$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{e^x} = 0$ [V] [F]

vii) $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$ [V] [F]

viii) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$ [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)} \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \log 3x\, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 18 Febbraio 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} n[\sqrt[n]{e}-1] \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{|x-1|-|x+1|}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2,\end{cases}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	disegnare il grafico di f e dire se f è continua in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
ii)	l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dall'asse delle y e dal grafico di f è 2	[V]	[F]
iii)	f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{1,\ 2\}$	[V]	[F]
iv)	f è monotona non–crescente in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
v)	$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$	[V]	[F]
vi)	$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{e^x}=0$	[V]	[F]
vii)	$\displaystyle\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1$	[V]	[F]
viii)	$\displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1.$	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)} \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \log 3x\,dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 18 Marzo 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{n^{3n}}{e^{n^2}}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n = \left(\frac{n^3}{e^n}\right)^n$ [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ [V] [F]

(d) la serie assegnata è divergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) disegnare il grafico di f e dire se f è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x = 1$, $x = 2$ e dal grafico di f è 2 [V] [F]

iii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iv) f è monotona decrescente in $\mathbb{R}_0^+$ [V] [F]

v) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ [V] [F]

vi) $y = 2x - 1$ è un asintoto obliquo per f [V] [F]

vii) $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{x} = 0$ [V] [F]

viii) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$ [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \sin(\log x)dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 18 Marzo 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x-2\sin^2 x+3x^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x+x^2|-|x-x^2|}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2x-1, & x>1 \end{cases}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	disegnare il grafico di f e dire se f è continua in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
ii)	l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x=1$, $x=2$ e dal grafico di f è 2	[V]	[F]
iii)	f è derivabile in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
iv)	f è monotona decrescente in $\mathbb{R}_0^+$	[V]	[F]
v)	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$	[V]	[F]
vi)	$y=2x-1$ è un asintoto obliquo per f	[V]	[F]
vii)	$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x}=0$	[V]	[F]
viii)	$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1.$	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \sin(\log x)dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 29 Aprile 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, $\quad a_n = \dfrac{1-\sqrt{\dfrac{n-2}{n}}}{n}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ [V] [F]

(d) la serie assegnata è divergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]
ii) f è monotona crescente in $\mathbb{R}_0^+$ [V] [F]
iii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ [V] [F]
iv) $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f [V] [F]
v) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -1.$ [V] [F]

vi) $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1/2.$ [V] [F]

vii) $\int_0^2 f(x)dx = 0$ [V] [F]

viii) l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x = 0$, $x = 2$ e dal grafico di f è 2 [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_0^{\infty} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^{3/2}}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 29 Aprile 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(ex+1)}{\sqrt{|x|+\sin x + x^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\log n^2\right)\sin\frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x - \log x^2 - e^x}{\log^2 x + x^x}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) f è monotona crescente in $\mathbb{R}_0^+$ [V] [F]

iii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ [V] [F]

iv) $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f [V] [F]

v) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -1.$ [V] [F]

vi) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1/2.$ [V] [F]

vii) $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = 0$ [V] [F]

viii) l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x = 0$, $x = 2$ e dal grafico di f è 2 [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_0^\infty \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^{3/2}}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 17 Giugno 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\log x}}{e^{1/x}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n-n}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x^2(\log x^2 - 1)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]

iv) $x = 0$ è un un punto di massimo assoluto per f in $\mathbb{R}$ [V] [F]

v) $\max_{x\in[-1,1]} f(x) = -1.$ [V] [F]

vi) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -1.$ [V] [F]

vii) f raggiunge il suo minimo assoluto in $x = \pm 1$ [V] [F]

viii) l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x = 0$, $x = \sqrt{e}$ e dal grafico di f è 1 [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-1/|x|}}{x^2} dx \qquad \text{e} \qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - e^2}}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 27 Giugno 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n = \dfrac{n+\sin n}{n^2+1}$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(b) la serie assegnata converge assolutamente [V] [F]

(c) la serie assegnata converge semplicemente [V] [F]

(d) la serie assegnata è una serie di potenze. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = 2\log\dfrac{x}{x-1} + x$, $x \in D = (1, \infty)$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è derivabile in D [V] [F]
ii) $x = 1$ è un asintoto verticale per f [V] [F]
iii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ [V] [F]
iv) $x = 2$ è un un punto di massimo assoluto per f in D [V] [F]
v) $\max_{x\in[2,3]} f(x) = 1$ [V] [F]

vi) f raggiunge il suo minimo assoluto in $x = 2$ [V] [F]

vii) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \log(4e^2)$ [V] [F]

viii) l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x = 1$, $x = 2$ e dal grafico di f è 1 [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{(1+x^2)^2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty} (\sin x)e^{-x}dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 27 Giugno 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{1+|x|}\right), \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{n!}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x)=2\log\dfrac{x}{x-1}+x$, $x\in D=(1,\infty)$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è derivabile in D	[V]	[F]
ii)	$x=1$ è un asintoto verticale per f	[V]	[F]
iii)	$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$	[V]	[F]
iv)	$x=2$ è un un punto di massimo assoluto per f in D	[V]	[F]
v)	$\max_{x\in[2,3]} f(x)=1$	[V]	[F]
vi)	f raggiunge il suo minimo assoluto in $x=2$	[V]	[F]
vii)	$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\log(4e^2)$	[V]	[F]
viii)	l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x=1$, $x=2$ e dal grafico di f è 1	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{(1+x^2)^2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty}(\sin x)e^{-x}dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 13 Luglio 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $\quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\quad$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $\quad a_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(b) la serie assegnata converge assolutamente [V] [F]

(c) la serie assegnata converge semplicemente [V] [F]

(d) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n+1}}$ converge. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = e^{(x-1)/x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]
ii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(0) = 0$ [V] [F]
iii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]
iv) $y = 1$ è un asintoto orizzontale per f [V] [F]
v) $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ [V] [F]

vi) f raggiunge il suo minimo assoluto in $x = 0$ [V] [F]

vii) $1 < f(2) < 2$ e f raggiunge il suo massimo assoluto in $x = 2$ [V] [F]

viii) l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x = 0$, $x = 2$ e dal grafico di f è minore di 4 [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\arctan x|}{1+x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 (\log x)^3\,dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 13 Luglio 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \sqrt[3]{x+1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{5\sin^3 x + 2\log(x+1)}{x^2+e^x-1} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\log n}\right)^n.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = e^{(x-1)/x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è continua in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
ii)	f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(0) = 0$	[V]	[F]
iii)	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$	[V]	[F]
iv)	$y = 1$ è un asintoto orizzontale per f	[V]	[F]
v)	$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$	[V]	[F]
vi)	f raggiunge il suo minimo assoluto in $x = 0$	[V]	[F]
vii)	$1 < f(2) < 2$ e f raggiunge il suo massimo assoluto in $x = 2$	[V]	[F]
viii)	l'area della regione piana delimitata dall'asse delle x, dalle rette $x = 0$, $x = 2$ e dal grafico di f è minore di 4	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\arctan x|}{1+x^2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 (\log x)^3 dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 28 Luglio 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+n}{2^n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $(-1)^n\sqrt{n}+n \leq 2n$ per ogni $n \geq 0$ [V] [F]

(b) $0 \leq a_n \leq \frac{n}{2^{n-1}}$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(c) la serie assegnata diverge [V] [F]

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq 1$. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x^2 + 4\log\left(\frac{x}{x+1}\right) + \log\left(\frac{1}{x^4}\right)$, $x > 0$, $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f si può scrivere nella forma $x^2 - 4\log(x+1)$ per $x > 0$ [V] [F]

ii) f è continua in $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ [V] [F]

iii) f è derivabile in $\mathbb{R}_0^+$ e $f'(0) = -4$ [V] [F]

iv) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ [V] [F]

v) f è limitata superiormente in $\mathbb{R}_0^+$ [V] [F]

vi) $\min_{x\in\mathbb{R}_0^+} f(x) = 1$ [V] [F]

vii) $\int_0^1 f(x)dx = 1$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-1/|x|}}{x^2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} 4\frac{\log x}{x^3}dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.
C.L. in Scienze Naturali – 28 Luglio 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{|x|}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+3x}{x^5+7x^4+5x^3+x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x^2 + 4\log\left(\frac{x}{x+1}\right) + \log\left(\frac{1}{x^4}\right)$, $x > 0$, $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f si può scrivere nella forma $x^2 - 4\log(x+1)$ per $x > 0$	[V]	[F]
ii)	f è continua in $\mathbb{R}_0^+ = [0,\infty)$	[V]	[F]
iii)	f è derivabile in $\mathbb{R}_0^+$ e $f'(0) = -4$	[V]	[F]
iv)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$	[V]	[F]
v)	f è limitata superiormente in $\mathbb{R}_0^+$	[V]	[F]
vi)	$\min_{x\in\mathbb{R}_0^+} f(x) = 1$	[V]	[F]
vii)	$\int_0^1 f(x)dx = 1.$	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-1/|x|}}{x^2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} 4\frac{\log x}{x^3}dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 5 Settembre 2005

1) Data la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{e^{1/n}-1}{(-1)^n+2n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n > 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$ [V] [F]

(b) $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(c) la serie assegnata diverge [V] [F]

(d) se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x\log\left(\dfrac{1}{1+x}\right) + x\log x + 1$, $x > 0$, $f(0) = 1$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) $f(x) = 1 - \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 1 + x\log\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ [V] [F]
ii) f è continua in $x = 0$ [V] [F]
iii) $x = 0$ è un asintoto verticale per f [V] [F]
iv) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ [V] [F]
v) $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f [V] [F]
vi) f è derivabile in $\mathbb{R}^+$ [V] [F]

vii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ [V] [F]

viii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$ [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2/2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 5 Settembre 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-x)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!+2}{n!}\right)^n.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = x\log\left(\frac{1}{1+x}\right) + x\log x + 1$, $x > 0$, $f(0) = 1$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	$f(x) = 1 - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 + x\log\left(\frac{x}{1+x}\right)$	[V]	[F]
ii)	f è continua in $x = 0$	[V]	[F]
iii)	$x = 0$ è un asintoto verticale per f	[V]	[F]
iv)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$	[V]	[F]
v)	$y = 0$ è un asintoto orizzontale per f	[V]	[F]
vi)	f è derivabile in $\mathbb{R}^+$	[V]	[F]
vii)	$\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1$	[V]	[F]
viii)	$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2/2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 23 Settembre 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{5}{6^{2n}}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) la serie assegnata diverge [V] [F]

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{6}$ [V] [F]

(c) la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$ [V] [F]

(d) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ converge. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \le 0 \\ \frac{1-2\sqrt{x}}{2+x}, & x > 0 \end{cases}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]
ii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]
iii) $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ [V] [F]
iv) $x = 0$ è una cuspide per f [V] [F]
v) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ [V] [F]
vi) $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f [V] [F]
vii) $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}$ [V] [F]
viii) $f(x) < 0$ per ogni $x > \frac{1}{4}$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3} \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 23 Settembre 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5\sqrt{n}}{n+\log(1+n)} \cdot \sin\frac{2}{n}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \le 0 \\ \frac{1-2\sqrt{x}}{2+x}, & x > 0 \end{cases}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è continua in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
ii)	f è derivabile in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
iii)	$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$	[V]	[F]
iv)	$x = 0$ è una cuspide per f	[V]	[F]
v)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$	[V]	[F]
vi)	$y = 0$ è un asintoto orizzontale per f	[V]	[F]
vii)	$\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}$	[V]	[F]
viii)	$f(x) < 0$ per ogni $x > \frac{1}{4}$.	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali generalizzati:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3} \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 14 Novembre 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ [V] [F]

(b) la serie assegnata converge [V] [F]

(c) $\left(\frac{n^2+1}{2n^2}\right)^n \sim \frac{1}{2^n}$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(d) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2}\right)^n$ diverge. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-1}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) il dominio di f è $[-2,2]$ [V] [F]

ii) f è continua in $[1,2]$ [V] [F]

iii) f è derivabile in $(1,2)$ [V] [F]

iv) f è strettamente crescente in $[1,2]$ [V] [F]

v) f ha due zeri [V] [F]

vi) f è integrabile in $[1,2]$ [V] [F]

vii) $\min_{[1,2]} f(x) = 1$ [V] [F]

viii) $\max_{[1,2]} f(x) = 2.$ [V] [F]

3) Mostrare che l'integrale $\int_1^e \frac{\sin(3\log x)}{x\log x}\,dx$ è convergente e calcolare gli integrali:

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(3\log x)}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 x^{-1/3}\log x\,dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 14 Novembre 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{1-n}+\frac{5+\sin n+3n^2}{\sqrt{n}+n^2}\right), \qquad \lim_{x\to 1}\left[2x-1+\frac{x^2-1}{\sin(x-1)}\right], \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{|x|}}-1+\tan^2 x}{\sqrt{\sin|x|+7x^3}}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x)=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{x-1}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	il dominio di f è $[-2,2]$	[V]	[F]
ii)	f è continua in $[1,2]$	[V]	[F]
iii)	f è derivabile in $(1,2)$	[V]	[F]
iv)	f è strettamente crescente in $[1,2]$	[V]	[F]
v)	f ha due zeri	[V]	[F]
vi)	f è integrabile in $[1,2]$	[V]	[F]
vii)	$\min\limits_{[1,2]} f(x)=1$	[V]	[F]
viii)	$\max\limits_{[1,2]} f(x)=2.$	[V]	[F]

3) Mostrare che l'integrale $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(3\log x)}{x\log x}\,dx$ è convergente e calcolare gli integrali:

$$\int_1^{e^\pi}\frac{\sin(3\log x)}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 x^{-1/3}\log x\,dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 13 Dicembre 2005

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{\cos n}{n^2+3n-7},$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $|a_n| < \frac{1}{n^2}$ per $n \geq 3$ [V] [F]

(b) la serie converge assolutamente [V] [F]

(c) la serie converge semplicemente [V] [F]

(d) la serie converge. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x<1 \\ 3 & x=1 \\ 3\dfrac{\log x}{x-1} & x>1 \end{cases}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) $f(x) = x+2$ per $x \leq 1$ [V] [F]
ii) f è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]
iii) $f'(3+) = -3/2$ [V] [F]
iv) $x = 3$ è un punto angoloso per f [V] [F]
v) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ [V] [F]
vi) l'asse delle x è un asintoto orizzontale per f [V] [F]

vii) $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 2$ [V] [F]

viii) l'area della regione piana delimitata dalle rette $y=0$, $x=1$ e dal grafico di f è 1. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \log x\right) dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 13 Dicembre 2005

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^3+2n}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{|x-1|-|x+1|} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{2\arctan x^2 + \tan^2 x + \sqrt{x\sin x}}{\sin 2x}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x<1 \\ 3 & x=1 \\ 3\dfrac{\log x}{x-1} & x>1 \end{cases}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	$f(x) = x+2$ per $x \le 1$	[V]	[F]
ii)	f è continua in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
iii)	$f'(3+) = -3/2$	[V]	[F]
iv)	$x = 3$ è un punto angoloso per f	[V]	[F]
v)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$	[V]	[F]
vi)	l'asse delle x è un asintoto orizzontale per f	[V]	[F]
vii)	$\max_{\mathbb{R}} f(x) = 2$	[V]	[F]
viii)	l'area della regione piana delimitata dalle rette $y = 0$, $x = 1$ e dal grafico di f è 1.	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \log x\right) dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!