Compiti d'Esame – A.A. 2005/2006

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 20 Gennaio 2006

1) Data la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\quad a_n = \dfrac{n^{2n}-10}{e^{n^2-n}}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n \sim \left(\dfrac{n^2}{e^n}\right)^n$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ [V] [F]

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ [V] [F]

(d) la serie diverge. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^4}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iii) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]

iv) $y = 1$ è un asintoto orizzontale per f [V] [F]

v) $\displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$ [V] [F]

vi) $x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto per f [V] [F]

vii) f non ammette massimo assoluto in $\mathbb{R}$ [V] [F]

viii) f è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_{-\infty}^{\log(\pi/2)} e^{2x}\sin(e^x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{1/e} \frac{dx}{x\log^2 x}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 20 Gennaio 2006

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|\tan x|}}{7x^2 - 5\sin^2 x + 2\log(\sqrt{|x|}+1)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x + x - |x - e^x|}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^4}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]

iv) $y = 1$ è un asintoto orizzontale per f [V] [F]

v) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$ [V] [F]

vi) $x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto per f [V] [F]

vii) f non ammette massimo assoluto in $\mathbb{R}$ [V] [F]

viii) f è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_{-\infty}^{\log(\pi/2)} e^{2x}\sin(e^x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^{1/e} \frac{dx}{x\log^2 x}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 6 Febbraio 2006

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{\log(n+1)-\log n}{\sqrt{n}}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$ [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ [V] [F]

(d) la serie converge. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = (x^2+1)\frac{\log x}{x}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ [V] [F]

ii) $x = 0$ è un asintoto verticale per f [V] [F]

iii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ [V] [F]

iv) f è derivabile in $\mathbb{R}^+$ [V] [F]

v) f è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$ [V] [F]

vi) f è invertibile in $\mathbb{R}^+$ [V] [F]

vii) f^{-1} è positiva in $\mathbb{R}$ [V] [F]

viii) $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = 0$ [V] [F]

ix) l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dall'asse delle x e dalle rette $x = 1$ e $x = e$ è 1. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_1^{\infty} \frac{2\,dx}{x(1+x^2)} \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty} x\,e^{1-x^2}\,dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 6 Febbraio 2006

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} x(x-\sqrt{x^2-1}), \qquad \lim_{x\to-\infty} x(x+\sqrt{x^2-1}) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sin\sqrt{2x}+x|x|}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x)=(x^2+1)\dfrac{\log x}{x}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ [V] [F]

ii) $x=0$ è un asintoto verticale per f [V] [F]

iii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ [V] [F]

iv) f è derivabile in $\mathbb{R}^+$ [V] [F]

v) f è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$ [V] [F]

vi) f è invertibile in $\mathbb{R}^+$ [V] [F]

vii) f^{-1} è positiva in $\mathbb{R}$ [V] [F]

viii) $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=0$ [V] [F]

ix) l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dall'asse delle x e dalle rette $x=1$ e $x=e$ è 1. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_1^\infty \frac{2\,dx}{x(1+x^2)} \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty x\,e^{1-x^2}dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 21 Febbraio 2006

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \dfrac{\sqrt{1+\sin(1/n)} - \sqrt{1-\sin(1/n)}}{\sin(1/n^3)}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n > 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots,$ [V] [F]

(b) $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$, [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, [V] [F]

(d) la serie è convergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = |x|e^{-1/x^2}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ [V] [F]

iii) f è continua $\mathbb{R}$ [V] [F]

iv) $f'(0) = 1$ [V] [F]

v) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

vi) f è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$ [V] [F]

vii) $x = 0$ punto di minimo assoluto per f in $\mathbb{R}$ [V] [F]

viii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]

ix) $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \infty$ [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \left(\arctan\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 21 Febbraio 2006

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}(1+2e^{-x})^{e^x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\log(e+ex)}{\sin(2x)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x)=|x|e^{-1/x^2}$ per $x\neq 0$ e $f(0)=0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è pari in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
ii)	$\lim_{x\to 0} f(x)=1$	[V]	[F]
iii)	f è continua $\mathbb{R}$	[V]	[F]
iv)	$f'(0)=1$	[V]	[F]
v)	f è derivabile in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
vi)	f è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$	[V]	[F]
vii)	$x=0$ punto di minimo assoluto per f in $\mathbb{R}$	[V]	[F]
viii)	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$	[V]	[F]
ix)	$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\infty$	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_0^\infty \frac{\arctan e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1\left(\arctan\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 31 Marzo 2006

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{n2^n}{3^n - 2},$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n > 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots,$ [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$ [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ [V] [F]

(d) la serie è convergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \frac{\log|x|}{x^2}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ [V] [F]

iii) f ha un asintoto verticale in $x = 0$ [V] [F]

iv) f è continua in $x = 0$ [V] [F]

v) f non è derivabile in $x = 0$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]

vii) $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2e}$ [V] [F]

viii) l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dall'asse delle x e dalle rette $x = 1$ e $x = e$ è 1 [V] [F]

ix) $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\infty.$ [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_1^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty} \frac{1-x}{e^x}\, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 31 Marzo 2006

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(e^{1/n}-1)^2}{\sin(2/n)}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos x}{2}\right)^{\log x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^n}}.$$

2) Data la funzione definita da: $f(x) = \dfrac{\log|x|}{x^2}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è pari in $\mathbb{R}$	[V] [F]
ii)	$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$	[V] [F]
iii)	f ha un asintoto verticale in $x = 0$	[V] [F]
iv)	f è continua in $x = 0$	[V] [F]
v)	f non è derivabile in $x = 0$	[V] [F]
vi)	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$	[V] [F]
vii)	$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{2e}$	[V] [F]
viii)	l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dall'asse delle x e dalle rette $x = 1$ e $x = e$ è 1	[V] [F]
ix)	$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\infty$.	[V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_1^\infty \frac{\log(1+x)}{x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty \frac{1-x}{e^x}\,dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 21 Aprile 2006

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \left(\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}\right)^n$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n > 0$ per ogni $n = 2, 3, \dots,$ [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$ [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ [V] [F]

(d) la serie è convergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita da $f(x) = |x|e^{-x^2}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ [V] [F]

iii) f non è continua in $x = 0$ [V] [F]

iv) f è derivabile in $x = 0$ [V] [F]

v) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]

vii) l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dall'asse delle x è 1 [V] [F]

viii) f non è limitata superiormente [V] [F]

ix) $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$ [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 21 Aprile 2006

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n^n}, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\log x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{2/x}.$$

2) Data la funzione definita da $f(x) = |x|e^{-x^2}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ [V] [F]

iii) f non è continua in $x = 0$ [V] [F]

iv) f è derivabile in $x = 0$ [V] [F]

v) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ [V] [F]

vii) l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dall'asse delle x è 1 [V] [F]

viii) f non è limitata superiormente [V] [F]

ix) $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$ [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 19 Giugno 2006

1) Data la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $a_n > 0$ per ogni $n = 2, 3, \ldots,$ [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e,$ [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ [V] [F]

(d) la serie è convergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita da $f(x) = |x| + |x^2 - x|$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) f non è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iii) f è derivabile in $x = 0$ [V] [F]

iv) f è derivabile in $x = 1$ [V] [F]

v) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ [V] [F]

vii) l'area della regione piana delimitata dal grafico di f dall'asse delle x e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$ è 1 [V] [F]

viii) $x = 0$ e $x = 1$ sono punti angolosi [V] [F]

ix) f non è convessa in $[0, 1]$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \log(1 + e^x)dx \qquad \text{e} \qquad \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 19 Giugno 2006

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!2^n}{n^n}, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{x^2}{x^6+1}\right)^{x^3-1} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-1} \frac{x+1}{|x|-1}.$$

2) Data la funzione definita da $f(x) = |x| + |x^2 - x|$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è pari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) f non è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iii) f è derivabile in $x = 0$ [V] [F]

iv) f è derivabile in $x = 1$ [V] [F]

v) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ [V] [F]

vii) l'area della regione piana delimitata dal grafico di f dall'asse delle x e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$ è 1 [V] [F]

viii) $x = 0$ e $x = 1$ sono punti angolosi [V] [F]

ix) f non è convessa in $[0, 1]$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \log(1+e^x)dx \qquad \text{e} \qquad \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+1}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.

C.L. in Scienze Naturali – 4 Luglio 2006

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\quad a_n = \frac{e^{-n^2+n}}{2^n}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) è una serie geometrica, [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$, [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{e}$, [V] [F]

(d) la serie è convergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita in $\mathbb{R}_0^+$ da $f(0) = f(1) = 0$, $f(x) = \frac{x}{\log^2 x}$, per $x > 0$ e $x \neq 1$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è continua in $x = 0$ [V] [F]

ii) f è continua in $x = 1$ [V] [F]

iii) $x = 1$ è asintoto verticale per f [V] [F]

iv) f ha esattamente 2 punti di minimo [V] [F]

v) $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ [V] [F]

vii) f non è crescente in $[0, 1)$ [V] [F]

viii) $f'(0) = 0$ [V] [F]

ix) f non è derivabile in $x = 1$. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\log^2 x} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} x^2 \log x\, dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 4 Luglio 2006

1) Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!3^n}{(3n)!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n^2+n+1}\right)^{n^2+5n} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3\sqrt{x}+2x+5\sin x}{6\cos x+3x^{2/3}+x}.$$

2) Data la funzione definita in $\mathbb{R}_0^+$ da $f(0)=f(1)=0$, $f(x)=\dfrac{x}{\log^2 x}$, per $x>0$ e $x\neq 1$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i)	f è continua in $x=0$	[V]	[F]
ii)	f è continua in $x=1$	[V]	[F]
iii)	$x=1$ è asintoto verticale per f	[V]	[F]
iv)	f ha esattamente 2 punti di minimo	[V]	[F]
v)	$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1$	[V]	[F]
vi)	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$	[V]	[F]
vii)	f non è crescente in $[0,1)$	[V]	[F]
viii)	$f'(0)=0$	[V]	[F]
ix)	f non è derivabile in $x=1$.	[V]	[F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\log^2 x} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} x^2 \log x dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova Scritta di *Matematica* – N.O.
C.L. in Scienze Naturali – 19 Luglio 2006

1) Data la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{n^{3n}}{e^{n^2}},$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) è una serie a segni alternati, [V] [F]

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$ [V] [F]

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e},$ [V] [F]

(d) la serie è convergente. [V] [F]

2) Data la funzione definita in $\mathbb{R}$ da $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \le 1 \\ x\left(1 - \frac{1}{|x|}\right) & \text{se } |x| > 1 \end{cases},$ stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è dispari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) f è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iv) f è monotona in $\mathbb{R}$ [V] [F]

v) f è invertibile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ [V] [F]

vii) $x = -1$ è un punto di massimo locale per f [V] [F]

viii) $x = 1$ è un punto di minimo locale per f [V] [F]

ix) $x = -1$ e $x = 1$ sono punti angolosi per f. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} x^{-2} \log x dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Prova scritta di *Istituzioni di Matematiche* – V.O.

C.L. in Scienze Naturali – 19 Luglio 2006

1) Calcolare i seguenti tre limiti: $\lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-x}\right)^{e^x}$,

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + x\cos x + x\log(1+x)}{3x^2+x}.$$

2) Data la funzione definita in $\mathbb{R}$ da $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } |x|\le 1 \\ x\left(1-\frac{1}{|x|}\right) & \text{se } |x|>1 \end{cases}$,

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i) f è dispari in $\mathbb{R}$ [V] [F]

ii) f è continua in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iii) f è derivabile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

iv) f è monotona in $\mathbb{R}$ [V] [F]

v) f è invertibile in $\mathbb{R}$ [V] [F]

vi) $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ [V] [F]

vii) $x=-1$ è un punto di massimo locale per f [V] [F]

viii) $x=1$ è un punto di minimo locale per f [V] [F]

ix) $x=-1$ e $x=1$ sono punti angolosi per f. [V] [F]

3) Calcolare gli integrali impropri, dopo una breve giustificazione:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \quad \text{e} \quad \int_1^\infty x^{-2}\log x\,dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!