* *

Compiti d'Esame – A.A. 2009/2010

* *

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 3*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2009/2010 – I Esercitazione – 15 Aprile 2010

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + \varepsilon y = \sin \varepsilon x, & \varepsilon \in (0,1), \\ y(0) = 0, & y'(0) = \sqrt{\varepsilon} + 1/(1-\varepsilon), \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione globale y_ε;
(b) determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che $\varphi(x) = a \sin \varepsilon x$ sia un integrale particolare dell'equazione completa;
(c) determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
(d) calcolare la soluzione globale y_ε e dimostrare che y_ε è limitata in $\mathbb{R}$;
(e) dimostrare che $(y_\varepsilon)_\varepsilon$ converge puntualmente a $y_0(x) = x$ per $\varepsilon \to 0^+$ e giustificare brevemente perché la convergenza non può essere uniforme.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{(x^2 - 2x - 3)y^2}{1 + y^2}, \\ y(0) = \alpha > 0, \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione massimale y_α di classe C^∞;
(b) dimostrare che y_α è globale a destra e a sinistra ed è positiva;
(c) determinare i punti di minimo e massimo locale di y_α;
(d) calcolare $\lim\limits_{x \to -\infty} y_\alpha(x)$ e $\lim\limits_{x \to \infty} y_\alpha(x)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}\left(e^{-y^2} + \sqrt{|y|}\right) \\ y(0) = 0, \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che ogni soluzione massimale y è di classe C^1;
(b) dire se si verifica il fenomeno del pennello di Peano;
(c) dimostrare che ogni soluzione massimale è globale;
(d) calcolare $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)$ e $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$ lungo ogni soluzione massimale del problema assegnato.

Esercizio 4. Data l'equazione differenziale lineare $y'' + a(x)y' = \alpha y$, ove $\alpha > 0$ e $a \in C([a,b])$, con $-\infty < a < b < \infty$, fissata una soluzione globale y dell'equazione, si chiede di dimostrare che:
(a) y è di classe $C^2([a,b])$;
(b) y non può ammettere un punto di massimo locale $x_0 \in (a,b)$ in cui $y(x_0) > 0$;
(c) y non può ammettere un punto di un punto di minimo locale $t_0 \in (a,b)$ in cui $y(t_0) < 0$;
(d) $y \equiv 0$ in $[a,b]$ se $y(a) = y(b) = 0$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Riscriviamo l'equazione in forma canonica: $y'' = -\varepsilon y + \sin \varepsilon x$. Per ogni $\varepsilon \in (0,1)$ le funzioni $a_1(x) \equiv -\varepsilon$ e $b(x) = \sin \varepsilon x$ sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, pertanto esiste un'unica soluzione massimale globale y_ε del problema di Cauchy assegnato.

(b) Calcoliamo $\phi'(x) = a\varepsilon \cos \varepsilon x$ e $\phi''(x) = -a\varepsilon^2 \sin \varepsilon x$ e imponiamo che ϕ, con le sue derivate, soddisfi l'equazione completa in $\mathbb{R}$:

$$-a\varepsilon^2 \sin \varepsilon x + a\varepsilon \sin \varepsilon x = \sin \varepsilon x \Leftrightarrow -a\varepsilon^2 + a\varepsilon - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}.$$

(c) Le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + \varepsilon$ sono $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\varepsilon}i$ e danno luogo ai due integrali linearmente indipendenti $\cos \sqrt{\varepsilon}x$ e $\sin \sqrt{\varepsilon}x$. Pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$z(x) = c_1 \cos \sqrt{\varepsilon}x + c_2 \sin \sqrt{\varepsilon}x \quad \forall\, c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Dai punti (b) e (c) sappiamo che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\varepsilon}x + c_2 \sin \sqrt{\varepsilon}x + \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \sin \varepsilon x \quad \forall\, c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per trovare la soluzione del problema di Cauchy assegnato dobbiamo determinare le costanti c_1 e c_2 in modo che siano verificate le condizioni iniziali. Calcoliamo preventivamente

$$y'(x) = -c_1\sqrt{\varepsilon} \sin \sqrt{\varepsilon}x + c_2\sqrt{\varepsilon} \cos \sqrt{\varepsilon}x + \frac{1}{1-\varepsilon} \cos \varepsilon x$$

ed imponiamo

$$y(0) = c_1 = 0, \qquad y'(0) = c_2\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon},$$

cioè $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. In definitiva la soluzione globale è

$$y_\varepsilon(x) = \sin \sqrt{\varepsilon}x + \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \sin \varepsilon x.$$

Si vede facilmente che per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$|y_\varepsilon(x)| \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}.$$

(e) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} y_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left(\sin \sqrt{\varepsilon}x + \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \sin \varepsilon x\right) = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left(\sqrt{\varepsilon}x + \frac{\varepsilon x}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right) = x = y_0(x)$$

Infine, dalla parte (d), sappiamo che le funzioni y_ε sono limitate, mentre la funzione limite puntuale y_0 non lo è. Pertanto la convergenza non può essere uniforme.

Esercizio 2. (a) Poiché $f(x,y) = (x+1)(x-3)y^2/(1+y^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, il nostro problema di Cauchy ammette unica soluzione massimale y_α di classe $C^\infty(I_{\max})$.

(b) Poiché $y \equiv 0$ in $\mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione, si ha che se $y(x_0) > 0$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$ allora $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per questo motivo la soluzione y_α è positiva. Poiché $|f(x,y)| \leq |x+1| \cdot |x-3|$, per il teorema di esistenza globale la soluzione massimale è globale, cioè $I_{\max} = \mathbb{R}$.

(c) Per $y > 0$ la funzione f è positiva se $x < -1$ oppure $x > 3$, nulla se $x = -1$ oppure $x = 3$, e negativa se $-1 < x < 3$. Ne segue che la funzione y_α è crescente per $x < -1$ e per $x > 3$, decrescente per $-1 < x < 3$ ed ha un massimo locale per $x = -1$ e un minimo locale per $x = 3$.

(d) La funzione è sempre positiva quindi $y_\alpha(-1) > 0$ e poiché è monotona crescente per $x < -1$ si hanno due eventualità: 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = 0$; 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \ell \in (0, y_\alpha(-1))$.

La seconda eventualità è esclusa poiché in contraddizione con il teorema dell'asintoto, in quanto si avrebbe $\lim_{x\to-\infty} y'_\alpha(x) = \infty$.

La soluzione y_α è sempre positiva e monotona crescente per $x > 3$ quindi esiste $\lim_{x\to\infty} y_\alpha(x) = L \in (y_\alpha(3), \infty]$. Dal teorema dell'asintoto segue di nuovo che deve essere $L = \infty$.

Esercizio 3. (a) L'equazione del primo ordine, non lineare, in forma canonica è autonoma con $x_0 = 0$, senza perdita di generalità, in quanto il problema è invariante per traslazione. Qui $f(y) = \sqrt{|y|}\left(e^{-y^2} + \sqrt{|y|}\right) \in C(\mathbb{R})$ non è lipschitziana in prossimità di $y = 0$, inoltre $f(y) \sim \sqrt{|y|}$ per $y \to 0$. Sappiamo che ogni soluzione locale può essere prolungata ad una soluzione massimale che è ovviamente solo $C^1(I_{\max})$, ma $C^\infty(I_{\max} \setminus \{0\})$.

(b) In virtù del Teorema 1.12, essendo $f(0) = 0$, con 0 unico zero per f, si verifica il fenomeno del pennello di Peano, in quanto $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{dy}{y^{1/2}} = \int_{-\varepsilon}^0 \frac{dy}{(-y)^{1/2}} = 2\sqrt{\varepsilon} < \infty$ per ogni $\varepsilon > 0$.

(c) Risulta $|f(y)| = f(y) \le \sqrt{|y|} + |y| \le 1 + 2|y|$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Quindi ogni soluzione massimale è globale.

(d) Essendo $f(y) \ge 0$, ogni soluzione massimale y risulta non decrescente in $\mathbb{R}$. Ora se esiste $x > 0$ in cui $y(x) > 0$, allora necessariamente $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ in virtù del teorema dell'asintoto, altrimenti $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, in quanto $\varphi \equiv 0$ è soluzione banale del problema di Cauchy. Analogamente, se esiste $x < 0$ in cui $y(x) < 0$, allora necessariamente $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$ in virtù del teorema dell'asintoto, altrimenti $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

Esercizio 4. (a) Chiaramente ogni soluzione è globale e dal teorema di regolarità di classe $C^2([a, b])$.

(b) Supponiamo per assurdo che esista un $x_0 \in (a, b)$ punto di massimo locale per una soluzione y e $y(x_0) > 0$. Allora, da (a) risulta $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) = 0$ e $y''(x_0) \le 0$. Ma dall'equazione differenziale risulta $y''(x_0) = \alpha y(x_0) > 0$, che è impossibile, come desiderato.

(c) Supponiamo per assurdo che esista un $t_0 \in (a, b)$ punto di massimo locale per una soluzione y e $y(t_0) < 0$. Allora, da (a) risulta $y(t_0) < 0$, $y'(t_0) = 0$ e $y''(t_0) \ge 0$. Ma dall'equazione differenziale risulta $y''(t_0) = \alpha y(t_0) < 0$, che è impossibile, come desiderato.

(d) Sia y una soluzione dell'equazione, con $y(a) = y(b) = 0$. Se esistesse $x \in (a, b)$ in cui $y(x) \ne 0$, allora per il teorema di Weierstrass o y assume valore massimo assoluto in (a, b) positivo e ciò è in contraddizione con il punto (b), oppure valore minimo assoluto in (a, b) negativo e ciò è in contraddizione con il punto (c). Dunque $y \equiv 0$ in $[a, b]$.

✻ ✻
✻ ✻

A.A. 2009/2010 – II Esercitazione – 7 Giugno 2010

Esercizio 1. Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, si chiede di:

(a) scrivere l'integrale generale di $Y' = \mathbb{A}Y + B(x)$, ove $B(x) = [1, (1 + e^x)^{-1}]^t$;
(b) determinare $e^{\mathbb{A}x}$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -x \arctan(y - 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione globale y;

(b) verificare che y è pari, calcolare i limiti $\lim_{x\to\mp\infty} y(x)$ e calcolare $y''(0)$;
(c) disegnare un grafico qualitativo della soluzione y;
(c) dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y(1/n)$ è convergente.

Esercizio 3. Dato $I_n(\alpha,\beta) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|x\|^{\alpha-1}}{(1+\|x\|)^{\alpha+\beta}}dx$, $\alpha > 1-n$ e $\beta > n-1$, si chiede di:
(a) calcolare $I_n(\alpha,\beta)$, utilizzando la funzione Beta;
(b) dimostrare che $\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x,y)\Gamma(x+y)$ per ogni $x > 0$ e $y > 0$;
(c) calcolare $I_4(-3/2, 9/2)$, utilizzando (a) e (b).

Esercizio 4. Sia $f(x) = x^2$ per $[-1,1)$ e $f(x+2) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si chiede di:
(a) determinare la serie di Fourier di f;
(b) calcolare $\zeta(2)$, utilizzando il punto (a);
(c) calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, utilizzando il punto (a);
(d) calcolare la somma delle serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$, utilizzando i precedenti punti (b) e (c).

Esercizio 5. Data una successione $(c_n)_n \subset \mathbb{R}^+$, tale che $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ è convergente, si chiede di dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{1+c_n}\sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sin c_n)\cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+c_n)[\sin nx + \cos nx]$$

sono le serie di Fourier di opportune funzioni di classe $C_{2\pi}$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) L'integrale generale del sistema è dato dalla formula

$$Y(x) = \mathbb{W}(x)C + \mathbb{W}(x)\int [\mathbb{W}(x)]^{-1}B(x)dx, \quad C \in \mathbb{R}^2,$$

dove $\mathbb{W}(x) = [v_1 e^{\lambda_1 x}, v_2 e^{\lambda_2 x}]$ è la matrice Wronskiana associata al sistema, che si costruisce a partire dagli autovalori λ_1 e λ_2 di $\mathbb{A}$ e dai rispettivi autovettori v_1 e v_2. Calcoliamo $\mathbb{W}(x)$. Il polinomio caratteristico è $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - 1$, e quindi gli autovalori di $\mathbb{A}$ sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

Poniamo $v_1 = [x,y]^t$ e $v_2 = [u,v]^t$, da determinare. In corrispondenza a $\lambda_1 = 1$, abbiamo

$$(\mathbb{A} - \lambda_1\mathbb{I})v_1 = \begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & -3 \\ 1 & -2-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ x - 3y = 0, \end{cases}$$

con soluzioni $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y=x/3\}$. Scegliamo $v_1=[1,1/3]^t$. Analogamente, in corrispondenza a $\lambda_2=-1$, abbiamo

$$(\mathbb{A}-\lambda_2\mathbb{I})v_2=\begin{bmatrix}2-\lambda_2 & -3\\ 1 & -2-\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

da cui il sistema

$$\begin{cases}3u-3v=0,\\ u-v=0,\end{cases}$$

con soluzioni $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,u=v\}$. Scegliamo $v_2=[1,1]^t$. Quindi

$$\mathbb{W}(x)=[v_1e^{\lambda_1x},v_2e^{\lambda_2x}]=\begin{bmatrix}e^x & e^{-x}\\ e^x/3 & e^{-x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},$$

da cui si ha $\det\mathbb{W}(\mathrm{x})=2/3$,

$$[\mathbb{W}(x)]^{-1}=\frac{1}{\det\mathbb{W}(\mathrm{x})}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}e^{-x} & -e^{-x}\\ -e^x/3 & e^x\end{bmatrix}\text{ e }[\mathbb{W}(0)]^{-1}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1/3 & 1\end{bmatrix}.$$

Ora

$$[\mathbb{W}(x)]^{-1}B(x)=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}e^{-x}-e^{-x}/(1+e^x)\\ -e^x/3+e^x/(1+e^x)\end{bmatrix}.$$

Integriamo ciascuna entrata del vettore $[\mathbb{W}(x)]^{-1}B(x)$, riservandoci di omettere le costanti di integrazione. Chiaramente $\int e^{-x}dx=-e^{-x}$. D'altra parte, usando il cambio di variabile $t=e^{-x}$, abbiamo

$$\int\frac{-e^{-x}}{1+e^x}\,dx=\int\frac{t}{1+t}\,dt=t-\log(1+t)=e^{-x}-\log(1+e^{-x}).$$

Quindi

$$\int\left(e^{-x}-\frac{e^{-x}}{1+e^x}\right)dx=-\log(1+e^{-x})=x-\log(1+e^x).$$

Consideriamo la seconda componente. Ovviamente $\int -e^x/3\,dx=-e^x/3$. Inoltre

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx=\log(1+e^x),$$

e pertanto

$$\int\left(\frac{-e^x}{3}+\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=-\frac{e^x}{3}+\log(1+e^x).$$

Riassumendo

$$\int[\mathbb{W}(x)]^{-1}B(x)dx=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}x-\log(1+e^x)\\ -e^x/3+\log(1+e^x)\end{bmatrix}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(x)\int[\mathbb{W}(x)]^{-1}B(x)dx&=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}e^x & e^{-x}\\ e^x/3 & e^{-x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-\log(1+e^x)\\ -e^x/3+\log(1+e^x)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}xe^x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(e^x-e^{-x})\log(1+e^x)\\ \frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(e^{-x}-\frac{e^x}{3})\log(1+e^x)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

L'integrale generale del sistema è

$$Y(x)=\begin{bmatrix}c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}xe^x-\frac{3}{2}(e^x-e^{-x})\log(1+e^x)\\ \frac{1}{3}c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x})\log(1+e^x)\end{bmatrix},$$

dove c_1, $c_2\in\mathbb{R}$.

(b) Si ha $e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{W}(x)[\mathbb{W}(0)]^{-1}$. Quindi

$$e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{W}(x)[\mathbb{W}(0)]^{-1} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x/3 & e^{-x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{3}{2}\begin{bmatrix} e^x - e^{-x}/3 & -e^x + e^{-x} \\ e^x/3 - e^{-x}/3 & -e^x/3 + e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. (a) Qui $f(x,y) = -x\arctan(y-1)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione massimale per ogni $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Inoltre $|f(x,y)| \le \pi|x|/2$ in $\mathbb{R}^2$. Quindi la soluzione massimale del nostro problema è globale.

(b) Poiché l'equazione ammette la soluzione banale $\varphi \equiv 1$, ne consegue che $y(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $y' > 0$ in $\mathbb{R}^+$, pertanto la soluzione y è strettamente monotona crescente in $\mathbb{R}^+$. Inoltre y è pari. Infatti, posto $z(x) = y(-x)$, abbiamo $z'(x) = -y'(-x) = -x\arctan(y(-x)-1) = -x\arctan(z(x)-1)$ e $z(0) = y(0) = 0$. Dunque dal teorema di unicità globale segue che $z \equiv y$ in $\mathbb{R}$, cioè y è pari in $\mathbb{R}$. In particolare, y ammette i limiti richiesti. Ora $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 1$, altrimenti sarebbe un numero $0 < \ell < 1$ e quindi dall'equazione risulterebbe che $y'(x) \to \infty$ per $x \to \infty$, e questo contraddirebbe il teorema dell'asintoto. Essendo y pari, risulta $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 1$. Infine, dalla regolarità di y, abbiamo $y''(x) = -\arctan(y(x)-1) - \dfrac{x}{1+[y(x)-1]^2}\cdot y'(x)$. Da cui $y''(0) = \pi/4$.

(c) Ovvio.

(d) Da (a) e (b) risulta $y(1/n) = y(0) + \dfrac{y'(0)}{n} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y''(0)}{n^2} + o(n^{-3}) = \dfrac{\pi}{8}\cdot\dfrac{1}{n^2} + o(n^{-3})$. Quindi $y(1/n) \sim \dfrac{\pi}{8}\cdot\dfrac{1}{n^2}$ e la serie assegnata è convergente.

Esercizio 3. (a) Per $r = \|x\|$ dal teorema di integrazione sulle sfere e dal cambio di variabile $t = 1/(1+r)$, risulta

$$I_n(\alpha,\beta) = \omega_n\int_0^\infty \frac{r^{\alpha+n-2}}{(1+r)^{\alpha+\beta}}dr = \omega_n\int_0^1 t^{\alpha+\beta-\alpha-n+2-2}(1-t)^{\alpha+n-2}dt$$
$$= \omega_n B(\beta-n+1, \alpha+n-1),$$

essendo per ipotesi $\alpha > 1-n$ e $\beta > n-1$.

(b) Dal teorema di Fubini risulta, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du\int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}dv = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v}u^{x-1}v^{y-1}dudv.$$

Facendo il cambiamento di variabili $u = zt$, $v = z(1-t)$, si ottiene

$$\int_{z=0}^\infty\int_{t=0}^1 e^{-z}(zt)^{x-1}(z(1-t))^{y-1}zdtdz = \int_{z=0}^\infty e^{-z}z^{x+y-1}dz\int_{t=0}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

quindi $\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x,y)\Gamma(x+y)$.

(c) Dalla parte (a) risulta $I_4(-3/2, 9/2) = \omega_4 B(3/2, 3/2)$, pertanto, usando la (b) e ricordando che $\omega_4 = 2\pi^2$, si ha

$$I_4(-3/2,9/2) = 2\pi^2\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = 2\pi^2\frac{\Gamma(1+1/2)^2}{2!} = \frac{\pi^3}{4}.$$

Esercizio 4. (a) Essendo f pari, è sufficiente calcolare i coefficienti a_n per $n = 0, 1, 2, \ldots$ Il periodo è $T = 2$ e la pulsazione è $\omega = \pi$, pertanto

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = \frac{2x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$, integrando per parti, si ottiene

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)dx = (-1)^n\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2.$$

Quindi $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$, in quanto, essendo f di classe $C_2 \cap AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ e $f' \in L_2^2$, la serie di Fourier di f converge a f totalmente in $\mathbb{R}$.

(b) Scegliendo $x = 1$, otteniamo

$$1 = f(1) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \text{cioè } \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Scegliendo $x = 0$,

$$0 = f(0) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{e quindi } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(d) Osserviamo che

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2},$$

trattandosi di serie assolutamente convergenti. Analogamente risulta

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}.$$

Usando i risultati trovati in (b) e (c), sommando membro a membro e dividendo per due le ultime due ugualianze si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

mentre se sottraiamo membro a membro e dividiamo per due abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Esercizio 5. Chiaramente $c_n = o(1)$ per $n \to \infty$. Inoltre tutti e tre i coefficienti delle serie trigonometriche sono asintotici a c_n. Pertanto tutte e tre le serie convergono totalmente e dunque uniformemente in $\mathbb{R}$ alla loro somma, che risulta una funzione di classe $C_{2\pi}$. La prima somma è una funzione dispari, la seconda è pari.

A.A. 2009/2010 – Sessione Estiva – 14 Giugno 2010

Esercizio 1. Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, si chiede di:

(a) determinare $e^{\mathbb{A}x}$;
(b) scrivere l'integrale generale di $Y' = \mathbb{A}Y$ e determinare la soluzione con $Y(x_0) = Y_0$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -x(\sin^2 y - 1) \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$ si chiede di:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità globale delle soluzioni $y_\alpha = y_\alpha(x)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) studiare la simmetria e la monotonia delle soluzioni y_α;
(c) calcolare i limiti $\lim\limits_{x\to\mp\infty} y_\alpha(x)$, dire se y_α presenta asintoti orizzontali e/o obliqui e disegnare un grafico qualitativo delle soluzioni y_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(d) dimostrare che la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_0(1/n)$, dove y_0 è la soluzione del problema per $\alpha = 0$, è convergente.

Esercizio 3. Data la funzione (onda raddrizzata) definita da $f(x) = |\sin x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si chiede di:

(a) determinare il periodo della funzione f, scrivere la sua serie di Fourier e discuterne la convergenza a f;
(b) calcolare le somme delle serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}$.

Esercizio 4. Si chiede di dimostrare che $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k} [\sin k\pi x + \cos k\pi x]$ è la serie di Fourier di un'opportuna funzione di classe C_T e determinare il periodo T.

Esercizio 5. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = g(r)$, $r = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, ove $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$, si chiede di:

(a) giustificare perché f è di classe $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e fornire una condizione sufficiente affinché f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$;
(b) dimostrare che $\int_{\partial B_n} \|x\|^n \partial_{\nu_e} f(x) dS = \omega_n g'(1)$, ove al solito $\omega_n = \mu_{n-1}(\partial B_n)$ e $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$;
(c) dimostrare che $\int_{B_n} \|x\|^n \langle \nabla f(x), x \rangle dx = -2n \int_{B_n} \|x\|^n f(x) dx$, quando $g(1) = 0$ e $g'(r) = o(1)$ per $r \to 0^+$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Calcoliamo una matrice wronskiana $\mathbb{W}(x)$ associata al sistema. Essa si costruisce a partire dagli autovalori λ_1 e λ_2 di $\mathbb{A}$ e dai rispettivi autovettori v_1 e v_2. Il polinomio caratteristico è $\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - 4$, e quindi gli autovalori di $\mathbb{A}$ sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$.

Poniamo $v_1 = [x, y]^t$ e $v_2 = [u, v]^t$, da determinare. In corrispondenza a $\lambda_1 = 2$, abbiamo

$$(\mathbb{A} - \lambda_1\mathbb{I})v_1 = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 3 \\ 1 & -1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} -x + 3y = 0, \\ x - 3y = 0, \end{cases}$$

con soluzioni $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 3y\}$. Scegliamo $v_1 = [3, 1]^t$. Analogamente, in corrispondenza di $\lambda_2 = -2$, abbiamo

$$(\mathbb{A} - \lambda_2\mathbb{I})v_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 3 \\ 1 & -1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 3u + 3v = 0, \\ u + v = 0, \end{cases}$$

con soluzioni $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u = -v\}$. Scegliamo $v_2 = [1, -1]^t$. Quindi

$$\mathbb{W}(x) = [v_1 e^{\lambda_1 x}, v_2 e^{\lambda_2 x}] = \begin{bmatrix} 3e^{2x} & e^{-2x} \\ e^{2x} & -e^{-2x} \end{bmatrix},$$

da cui si ha $\det\mathbb{W}(\mathrm{x}) = -4$,

$$[\mathbb{W}(x)]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ e^{2x} & -3e^{2x} \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbb{W}(0)]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Pertanto $e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{W}(x)[\mathbb{W}(0)]^{-1}$, e dunque

$$\begin{aligned} e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{W}(x)[\mathbb{W}(0)]^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2x} & e^{-2x} \\ e^{2x} & -e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2x} + e^{-2x} & 3e^{2x} - 3e^{-2x} \\ e^{2x} - e^{-2x} & e^{2x} + 3e^{-2x} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) L'integrale generale del sistema è dato dalla formula

$$Y(x) = e^{\mathbb{A}x}C = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (3c_1 + 3c_2)e^{2x} + (c_1 - 3c_2)e^{-2x} \\ (c_1 + c_2)e^{2x} + (3c_2 - c_1)e^{-2x} \end{bmatrix}, \quad C = (c_1, c_2)^t \in \mathbb{R}^2.$$

Data l'arbitrarietà di $C \in \mathbb{R}^2$, possiamo scrivere più semplicemente

$$Y(x) = \begin{bmatrix} 3c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \\ c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} \end{bmatrix}, \quad C = (c_1, c_2)^t \in \mathbb{R}^2.$$

La soluzione con $Y(x_0) = Y_0 = (y_0^1, y_0^2)^t$ è

$$Y(x) = e^{\mathbb{A}(x-x_0)}Y_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (3y_0^1 + 3y_0^2)e^{2(x-x_0)} + (y_0^1 - 3y_0^2)e^{-2(x-x_0)} \\ (y_0^1 + y_0^2)e^{2(x-x_0)} + (3y_0^2 - y_0^1)e^{-2(x-x_0)} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. (a) Qui $f(x,y) = -x(\sin^2 y - 1)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione massimale per ogni $(x_0, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Inoltre $|f(x,y)| \le 2|x|$ in $\mathbb{R}^2$. Quindi, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale y_α del nostro problema è globale.

(b) Studiamo la parità di y_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $z_\alpha(x) = y_\alpha(-x)$, abbiamo $z'_\alpha(x) = -y'_\alpha(-x) = -x(\sin^2(y_\alpha(-x)) - 1) = -x(\sin^2(z_\alpha(x)) - 1)$ e $z_\alpha(0) = y_\alpha(0) = \alpha$. Dunque dal teorema di unicità globale segue che $z_\alpha \equiv y_\alpha$ in $\mathbb{R}$, y_α cioè è pari in $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Pertanto è sufficiente studiare le soluzioni nel semipiano $x \ge 0$. Dall'equazione risulta che $y'_\alpha \ge 0$ in $\mathbb{R}^+$, cioè la soluzione y_α è monotona non–decrescente in $\mathbb{R}^+$.

(c) L'equazione ammette infinite soluzioni banali $\varphi \equiv k\pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto, se esiste $k \in \mathbb{Z}$ per cui $\alpha = k\pi/2$, la soluzione $y_\alpha(x) \equiv k\pi/2$ è l'unica soluzione globale. Altrimenti esisterà $k \in \mathbb{Z}$ per cui $\alpha \in ((k-1)\pi/2, k\pi/2)$ e quindi, dall'unicità della soluzione, dovrà essere $\alpha \le y_\alpha(x) < k\pi/2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In ogni caso y_α è limitata, perciò non ha asintoti obliqui. Dalla parte (b) sappiamo che, per la monotonia, y_α ammette i limiti richiesti. Se $\alpha = k\pi/2$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, non c'è niente da dimostrare. Nel caso non banale $\alpha \in ((k-1)\pi/2, k\pi/2)$ risulta $\lim\limits_{x\to\infty} y_\alpha(x) = \ell \in (\alpha, k\pi/2]$. Se fosse $\ell < k\pi/2$, dall'equazione risulterebbe che $y'_\alpha(x) \to \infty$ per $x \to \infty$, e questo contraddirebbe il teorema dell'asintoto. Pertanto, dalla parità della soluzione, si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to\infty} y_\alpha(x) = k\pi/2$ e quindi y_α ha un asintoto orizzontale. Il grafico è ovvio dai punti (b) e (c), inoltre si osserva che $x = 0$ è punto di minimo assoluto per y_α.

(d) Dalla regolarità di $f = f(x,y)$ si ha che la soluzione $y_0 = y_0(x)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto ha senso calcolare $y''_0(x) = -(\sin^2 y_0 - 1) - 2xy'_0 \sin y_0 \cos y_0$ e risulta $y_0(1/n) = y_0(0) + \dfrac{y'_0(0)}{n} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{y''_0(0)}{n^2} + o(n^{-3}) = \dfrac{1}{2n^2} + o(n^{-3})$. Quindi $y_0(1/n) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ e la serie assegnata è convergente.

Esercizio 3. (a) La funzione $f(x)$ è π–periodica e pari, per cui $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre risulta

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

e

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos n\omega x dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx.$$

Integrando per parti risulta

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx &= -\cos x \cos 2nx\Big|_0^{\pi/2} - 2n\int_0^{\pi/2} \cos x \sin 2nx dx\\ &= 1 - 2n \sin x \sin 2nx\Big|_0^{\pi/2} + 4n^2 \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx\\ &= 1 + 4n^2\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx dx,\end{aligned}$$

pertanto

$$a_n = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.$$

Essendo f di classe $C_\pi \cap AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e $f' = \text{sign}(\sin x)\cos x \in L^2_\pi$, la serie di Fourier converge totalmente a f in $\mathbb{R}$ e quindi anche uniformemente e puntualmente in $\mathbb{R}$. In particolare,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}.$$

(b) Chiamiamo $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$. Preso $x = \pi/2$, dai punti (a) e (b) risulta

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} S,$$

da cui $S = \frac{\pi - 2}{4}$.

Scriviamo l'uguaglianza di Bessel–Parseval per f:

$$2\int_0^{\pi/2} |\sin x|^2 dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|^2 dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{16}{2\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2}\right\}.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = -\cos x \sin x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx,$$

quindi $\int_0^{\pi/2} \sin x^2 dx = \frac{\pi}{4}$ e l'uguaglianza di Bessel-Parseval diventa

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}.$$

Pertanto si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Esercizio 4. Poiché

$$\lim_{k\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k}\right]^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(-1)^k/k} = \frac{1}{2},$$

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k}$ è convergente per il criterio della radice, di conseguenza la serie in esame $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k} [\sin k\pi x + \cos k\pi x]$ converge totalmente e quindi uniformemente in $\mathbb{R}$ ad una funzione $f \in C_T$. Infine il periodo è $T = 2\pi/\omega = 2$.

Esercizio 5. (a) La funzione f è di classe $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ perché composta di funzioni $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, cioè

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}^+ \longmapsto g(\|x\|) \in \mathbb{R}.$$

Se vogliamo che f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ è sufficiente richiedere che esista $\nabla f(0) \in \mathbb{R}^n$ e che $\lim_{x\to 0} \nabla f(x) = \nabla f(0)$. Essendo

$$\nabla f(x) = g'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|},$$

è sufficiente dunque che $g'(r) = o(1)$ per $r \to 0^+$.

(b) Osserviamo che $\nu_e(x) = x/\|x\| = x$ per ogni $x \in \partial B_n$, quindi si ha

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_n} \|x\|^n \partial_{\nu_e} f(x) dS &= \int_{\partial B_n} \partial_{\nu_e} f(x) dS = \int_{\partial B_n} \langle \nabla f(x), \nu_e(x)\rangle dS \\ &= \int_{\partial B_n} g'(\|x\|)\langle x, x\rangle dS = g'(1)\int_{\partial B_n} dS = \omega_n g'(1).\end{aligned}$$

(c) Passando in coordinate polari e integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{B_n} \|x\|^n \langle \nabla f(x), x\rangle dx &= \int_{B_n} \|x\|^n g'(\|x\|)\langle x/\|x\|, x\rangle dx = \int_{B_n} \|x\|^{n+1} g'(\|x\|)dx \\ &= \omega_n \int_0^1 r^{2n} g'(r)dr = \omega_n \left[r^{2n} g(r)\Big|_0^1 - 2n \int_0^1 r^{2n-1} g(r)dr \right] \\ &= -2n\omega_n \int_0^1 r^{2n-1} g(r)dr = -2n \int_{B_n} \|x\|^n f(x)dx.\end{aligned}$$

∗ ∗
∗ ∗

A.A. 2009/2010 – Sessione Estiva – 29 Giugno 2010

Esercizio 1. Data la matrice $\mathbb{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha - 3 & 3 \\ -3 & \alpha + 3 \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, si chiede di:

(a) dimostrare che $\mathbb{A}_\alpha$ non è diagonalizzabile e scrivere la forma canonica di Jordan per $\mathbb{A}_\alpha$;
(b) determinare il valore α tale che $\mathbb{A}_\alpha^2 = \mathbb{O}$ e calcolare $e^{\mathbb{A}_\alpha x}$;
(c) scrivere l'integrale generale di $Y' = \mathbb{A}_\alpha Y$ in corrispondenza del parametro α determinato al punto (b).

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = |x| y \arctan y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione globale y;
(b) verificare che y è monotona crescente e calcolare $\lim_{x\to\mp\infty} y(x)$;
(c) calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^0 y'(x)dx$.

Esercizio 3. Sia $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ e $I(\alpha, n) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n} \frac{(\|x\|^2 - 1)^{\alpha-1}}{\|x\|^{n-1+2\alpha}} dx$, con $n \geq 1$ e $\alpha > 0$. Si chiede di calcolare:

(a) $I(\alpha, n)$, utilizzando la funzione Gamma, e $I(1, 2)$;
(b) $\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha, n)$ e $\lim_{n\to\infty} I(\alpha, n)$.

Esercizio 4. Date le serie trigonometriche

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} [\sin(nx) + \cos(nx)], \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{n - \log n},$$

si chiede di:

(a) verificare che (i) è la serie di Fourier di una funzione periodica f;
(b) determinare il periodo di f e specificare il tipo di convergenza della serie (i) a f e la regolarità di f;
(c) verificare che (ii) è la serie di Fourier di una funzione periodica g;
(d) dimostare che la serie (ii) converge in L^p_T a g per ogni $p \geq 1$ e determinare il periodo T di g.

Esercizio 5. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa. Allora

(a) f è monotona; | V | F |
(b) $\int_a^b f(x)dx < \infty$; | V | F |
(c) $e^{f(x)}$ è convessa; | V | F |
(d) $f \circ g$ è convessa, se $g : (c, d) \to (a, b)$ è convessa. | V | F |

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il polinomio caratteristico di $\mathbb{A}_\alpha$ è $P(\lambda) = (\alpha-3-\lambda)(\alpha+3-\lambda)+9 = (\alpha-\lambda)^2$, pertanto la matrice in esame ha un unico autovalore $\lambda = \alpha$ con molteplicità algebrica pari a 2. Detto $v = (x, y)^t$ un autovettore associato, esso deve soddisfare

$$(\mathbb{A}_\alpha - \alpha\mathbb{I})v = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cioè } -x+y=0.$$

Quindi l'autospazio associato è generato da $v = (1, 1)^t$ e ha dimensione 1. La molteplicità algebrica dell'unico autovalore α è diversa dalla molteplicità geometrica e quindi la matrice non è diagonalizzabile. La forma canonica di Jordan per $\mathbb{A}_\alpha$ è costituita da un solo blocco 2×2 ed è

$$\mathbb{J}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

(b) Risulta

$$\mathbb{A}_\alpha^2 = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-6) & 6\alpha \\ -6\alpha & \alpha(\alpha+6) \end{bmatrix},$$

quindi $\mathbb{A}_\alpha^2 = \mathbb{O}$ se e solo se $\alpha = 0$. Dunque $\mathbb{A}_0^k = \mathbb{O}$ per ogni $k \geq 2$ e

$$e^{\mathbb{A}_0 x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}_0 x)^k}{k!} = \mathbb{I} + \mathbb{A}_0 x = \begin{bmatrix} 1-3x & 3x \\ -3x & 1+3x \end{bmatrix}.$$

(c) L'integrale generale è dato da

$$Y(x) = e^{\mathbb{A}_0 x}C = \begin{bmatrix} c_1 + 3(c_2 - c_1)x \\ c_2 + 3(c_2 - c_1)x \end{bmatrix}, \quad \text{con } C = (c_1, c_2)^t \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 2. (a) Qui $f(x, y) = |x| y \arctan y \in C(\mathbb{R}^2)$, con $|f(x, y)| \leq \pi|x| \cdot |y|/2$, pertanto esiste ed è unica $y \in C^1(\mathbb{R})$, soluzione globale del problema assegnato.

(b) La funzione $\phi \equiv 0$ è soluzione dell'equazione, quindi in virtù dell'unicità, $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo $y(0) = 1 > 0$. Ne segue che $y'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè y è monotona crescente in tutto $\mathbb{R}$ e dunque ammette limite per $x \to \mp\infty$.

Chiaramente $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \ell \in [0, \infty)$. Se fosse $\ell > 0$, si avrebbe $\lim\limits_{x\to-\infty} y'(x) = \infty$, in contraddizione con il teorema dell'asintoto. Quindi $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$. Analogamente, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$. Infatti, se fosse $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) < \infty$, risulterebbe $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = \infty$, in contraddizione con il teorema dell'asintoto.

(c) Per il punto (b) si ha $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} y'(x)dx = y(0) - \lim_{x\to-\infty} y(x) = 1.$

Esercizio 3. (a) Innanzitutto si osserva che la funzione integranda è radialmente simmetrica, dunque, passando a coordinate polari e ponendo $r = \|x\|$, si ha

$$\begin{aligned} I(\alpha, n) &= \omega_n \int_1^\infty \frac{(r^2-1)^\alpha}{r^{n-1+2\alpha}}\, r^{n-1} dr = \omega_n \int_1^\infty \frac{(r^2-1)^{\alpha-1}}{r^{2\alpha}}\, dr \\ &= \omega_n \int_1^\infty \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^\alpha \frac{dr}{r^2-1}. \end{aligned}$$

A questo punto usiamo il cambio di variabile $t = 1-1/r^2$ e quindi $r = 1/\sqrt{1-t}$, $dr = dt/2(1-t)^{3/2}$, che produce

$$\begin{aligned} I(\alpha, n) &= \frac{\omega_n}{2}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{\omega_n}{2}B\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\omega_n}{2}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\alpha+1/2)} = \frac{\sqrt{\pi}\omega_n}{2}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1/2)}, \end{aligned}$$

poiché $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Ricordando che $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ per ogni $x > 0$, si ha

$$I(1,2) = \frac{\sqrt{\pi}w_2}{2}\cdot\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+1/2)} = \frac{\sqrt{\pi}w_2}{\Gamma(1/2)} = w_2 = 2\pi.$$

(b) Dal punto (a) si ottiene

$$\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha, n) = \frac{\sqrt{\pi}\omega_n}{2}\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1/2)} = \infty,$$

poiché $\Gamma \in C(\mathbb{R}^+)$ e $\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x) = \infty$. Per calcolare il secondo limite proviamo prima che $\lim_{n\to\infty}\omega_n = 0$. Ricordiamo che

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} = 2\begin{cases} \dfrac{\pi^k}{(k-1)!}, & n = 2k, \\[2ex] \dfrac{\pi^{-1/2}\pi^k}{\Gamma(k-1/2)}, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Ora, $\omega_{2k} = 2\pi\dfrac{\pi^{k-1}}{(k-1)!}$ è il termine generale della serie convergente $2\pi\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} = 2\pi e^{\pi}$, dunque è un infinitesimo per $k\to\infty$. D'altra parte, se $n = 2k-1$, allora, posto $\alpha_k = \pi^k/\Gamma(k-1/2)$, si ottiene

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{\pi^{k+1}}{\Gamma(k+1/2)}\cdot\frac{\Gamma(k-1/2)}{\pi^k} = \pi\cdot\frac{\Gamma(k-1/2)}{(k-1/2)\Gamma(k-1/2)} = \frac{2\pi}{2k-1} \to 0 \quad \text{per } k\to\infty.$$

Dunque $\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0$. Ne consegue che $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\omega_{2k-1} = 2\pi^{-1/2}\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0$. Pertanto $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\omega_n = 0$. Quindi, in virtù di (a), si ha $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(\alpha, n) = 0$.

Esercizio 4. (a) Studiamo la convergenza della serie (i). Poiché

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n^{-1/2}}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} e^{\log n/\sqrt{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$ è convergente per il criterio della radice, di conseguenza la serie (i) converge totalmente e quindi uniformemente in $\mathbb{R}$ ad una funzione $f \in C_T$. Infine il periodo è $T = 2\pi/\omega = 2\pi$.

(b) Osserviamo che $0 < a_n = \dfrac{1}{n-\log n} \searrow 0$ per $n\to\infty$, essendo $\phi(x) = x - \log x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e $\phi'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0$ per $x \in [1, \infty)$. Poiché $\left(\dfrac{1}{\phi(x)}\right)' = -\dfrac{\phi'(x)}{\phi^2(x)}$, si ha che $\dfrac{1}{\phi(x)}$ è non crescente in $[1,\infty)$. Inoltre $a_n \sim \dfrac{1}{n} \to 0$ per $n\to\infty$ e, dal teorema di Abel–Dirichlet, risulta che la serie (ii) converge puntualmente in $\mathbb{R}$ ad una funzione $g \in \mathcal{M}_T$. Ovviamente g è dispari e $T = 2\pi/\omega = \pi$. Inoltre, per ogni $1 \leq p < \infty$, risulta $n^{p-2}a_n^p = \dfrac{n^{p-2}}{(n-\log n)^p} \sim \dfrac{1}{n^2}$ per $n\to\infty$, quindi $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p < \infty$ e, per il teorema di Abel–Dirichlet, la serie trigonometrica (ii) converge a $g \in L^p_\pi$. Infine $na_n = \dfrac{n}{n - \log n} \to 1 \neq 0$ per $n \to \infty$, quindi la convergenza a g non è uniforme.

Esercizio 5. (a) FALSO. La funzione definita da $f(x) = x^2$ per ogni $x \in (-1, 1)$ fornisce un controesempio, essendo decrescente in $(-1, 0)$ e non decrescente in $[0, 1)$.

(b) FALSO. Si consideri la funzione $f(x) = 1/x$ per ogni $x \in (0, 1]$. Chiaramente f è convessa, ma risulta

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_0^1 = \infty.$$

(c) VERO. Per ogni $x, y \in (a, b)$ e $t \in (0, 1)$ risulta

$$e^{f(tx+(1-t)y)} \leq e^{tf(x)+(1-t)f(y)} \leq te^{f(x)} + (1-t)e^{f(y)},$$

dove la prima disuguaglianza segue dalla convessità di f e dalla crescenza dell'esponenziale, mentre la seconda deriva dalla convessità dell'esponenziale.

(d) FALSO. Un controesempio è dato dalla composizione di $f(x) = -x$, con $g(x) = x^2$ per ogni $x \in (-1, 1)$. Infatti f è lineare e quindi convessa, ma $f \circ g(x) = -x^2$ è concava.

* *
* *

A.A. 2009/2010 – Sessione Estiva – 20 Luglio 2010

Esercizio 1. Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$, si chiede di:

(a) dimostrare che $\mathbb{A}$ non è diagonalizzabile e scrivere la forma canonica di Jordan;
(b) verificare che $\mathbb{A}^2 = \mathbb{O}$ e calcolare $e^{\mathbb{A}x}$;
(c) scrivere l'integrale generale di $Y' = \mathbb{A}Y + B(x)$, ove $B(x) = (0, x)^T$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x \sin y \\ y(0) = \pi/2 \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione globale y;
(b) verificare che y è pari in $\mathbb{R}$ e calcolare $\lim_{x\to\mp\infty} y(x)$;
(c) determinare gli intervalli di convessità e concavità della soluzione y;
(d) disegnare il grafico qualitativo della soluzione y.

Esercizio 3. Siano $F(x) = \|x - x_0\|^2(x - x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$, con $r > 0$. Dimostare che

$$\sup \left\{ \frac{\int_A \operatorname{div} F(x) dx}{r^3 \mu_{n-1}(\partial A)} \ : \ A = A^0 \subset B_r \text{ limitato, stokiano con } \mu_{n-1}(\partial A) > 0 \right\} = 1,$$

e che il sup è raggiunto quando $A = B_r$.

Esercizio 4. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione f in $L^2_{2\pi}$ ed in quali casi $f \in C_{2\pi}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arcsin n^{-2})[\sin(nx) + \cos(nx)], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2} \sin(nx), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(e^n)}{n^\alpha} \cos(nx), \quad \alpha > 1.$$

Esercizio 5. Dato il problema di Cauchy $(P)\ \begin{cases} y' = |x|^\pi + \sin y \\ y(0) = \pi \end{cases}$ si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) (P) ammette un'unica soluzione globale; V F

(b) la soluzione $y \in C^4(\mathbb{R})$; V F

(c) la soluzione $y \in C^5(\mathbb{R})$; V F

(d) $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$. V F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Il polinomio caratteristico di $\mathbb{A}$ è $P(\lambda) = \lambda^2$, pertanto la matrice in esame ha un unico autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica pari a 2. Detto $v = (x, y)^T$ un autovettore associato, esso deve soddisfare

$$\mathbb{A}v = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cioè } 3x - y = 0.$$

Quindi l'autospazio associato è generato da $v = (1/3, 1)^T$ e ha dimensione 1. La molteplicità algebrica dell'unico autovalore 0 è diversa dalla molteplicità geometrica e quindi la matrice non è diagonalizzabile. La forma canonica di Jordan per $\mathbb{A}$ è costituita da un solo blocco 2×2 ed è

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Risulta $\mathbb{A}^2 = \mathbb{O}$, quindi $\mathbb{A}^k = \mathbb{O}$ per ogni $k \ge 2$ e

$$e^{\mathbb{A}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}x)^k}{k!} = \mathbb{I} + \mathbb{A}x = \begin{bmatrix} 1+3x & -x \\ 9x & 1-3x \end{bmatrix}.$$

(c) L'integrale generale è dato per ogni $C = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$ da

$$Y(x) = e^{\mathbb{A}x}C + \Phi(x) = \begin{bmatrix} (3c_1 - c_2)x + c_1 \\ 3(3c_1 - c_2)x + c_2 \end{bmatrix} + \Phi(x),$$

ove $\Phi(x) = e^{\mathbb{A}x}K(x)$, con $K'(x) = e^{-\mathbb{A}x}B(x)$, cioè

$$K'(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x + 3x^2 \end{bmatrix}, \quad K(x) = \begin{bmatrix} x^3/3 \\ x^2/2 + x^3 \end{bmatrix}, \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} -x^3/6 \\ (x^2 - x^3)/2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. (a) Qui $f(x, y) = x \sin y \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $|f(x, y)| \le |x|$, pertanto esiste ed è unica $y \in C^\infty(\mathbb{R})$, soluzione globale del problema assegnato.

(b) Posto $z(x) = y(-x)$, risulta $z'(x) = -y'(-x) = -(-x)\sin y(-x) = x \sin z(x)$, e $z(0) = y(0) = \pi/2$. Pertanto dal teorema di unicità la soluzione y è pari in $\mathbb{R}$.

Tutte le funzioni $\phi_k \equiv k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni stazionarie dell'equazione, quindi in virtù del teorema di unicità, $0 < y(x) < \pi$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $y'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e $y'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^-$, cioè y è monotona crescente in $\mathbb{R}^+$ e monotona decrescente in $\mathbb{R}^-$. Pertanto $x = 0$ è un punto di minimo assoluto stretto per y. Inoltre y ammette limite per $x \to \mp\infty$.

Chiaramente $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \ell \in (\pi/2, \pi]$. Se fosse $\ell < \pi$, si avrebbe $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = \infty$, in contraddizione con il teorema dell'asintoto. Quindi $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \pi$. Poichè y è pari in $\mathbb{R}$, risulta $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \pi$.

(c) Risulta $y''(x) = \sin y(x) + x^2 \cos y(x) \sin y(x) = \sin y(x)[1 + x^2 \cos y(x)]$. Studiamo dapprima il caso $x \geq 0$ e poi per parità di y concluderemo. Certamente $\sin y(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$, inoltre se $0 \leq x < 1$ risulta $1 + x^2 \cos y(x) \geq 1 - x^2 > 0$. Dunque certamente $y''(x) > 0$ in $[0, 1)$. Ora $\varphi(x) = \pi - \arccos x^{-2}$ è ben definita in $x \geq 1$ e derivabile per $x > 1$, con $\varphi'(x) = -2/x\sqrt{x^4 - 1} < 0$, $\varphi(1) = \pi$ e $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \pi/2$. Poichè y è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$ con $y(0) = \pi/2$ e $\lim_{x\to\infty} y(x) = \pi$, esiste un unico punto $x_0 > 1$ tale che $y(x) < \varphi(x)$ se $1 < x < x_0$ e $y(x) > \varphi(x)$ se $x > x_0$. In conclusione i punti $x = \mp x_0$ sono punti di flesso per la soluzione y, l'intervallo $(-x_0, x_0)$ è di convessità per y, mentre gli intervalli $(-\infty, -x_0)$ e (x_0, ∞) sono di concavità per y.

(d) Il grafico è ovvio dai punti (b) e (c).

Esercizio 3. Dall teorema della divergenza alla funzione $F \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwartz, otteniamo

$$\int_A \text{div} F(x)dx = \int_{\partial A} \|x - x_0\|^2 < x - x_0, \nu_e(x) > dS \leq r^3 \int_{\partial A} dS = r^3 \mu_{n-1}(\partial A),$$

e l'uguaglianza vale quando $A = B_r$. Quindi il sup è raggiunto quando $A = B_r$.

Esercizio 4. Chiaramente $0 < a_n = \arcsin n^{-2} \searrow 0$ e è immediato verificare che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^{-2}} = 1$, cioè a_n ha lo stesso comportamento asintotico della successione n^{-2}. Dunque la serie numerica dei coefficienti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, e ne consegue che la serie trigonometrica converge totalmente (e quindi uniformemente) a qualche $f \in C_{2\pi}$.

Notiamo che $0 < a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$. Dal Teorema di Cesaro $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e}$, in quanto $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{e}$. Dunque si ha che $a_n \sim \dfrac{1}{e \cdot n}$ per $n \to \infty$. Pertanto dal teorema di Abel–Dirichlet, $f \in L^2_{2\pi}$, essendo $a_n \in \ell^2$, ma la serie non converge uniformemente a f e inoltre $f \notin C_{2\pi}$.

Poichè $\zeta(e^n) \to 1$ per $n \to \infty$, risulta $0 < a_n \sim n^{-\alpha}$ per $n \to \infty$, con $\alpha > 1$. Dunque la serie numerica dei coefficienti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, e ne consegue che la serie trigonometrica converge totalmente (e quindi uniformemente) a qualche $f \in C_{2\pi}$.

Esercizio 5. (a) VERO. Le funzioni $f(x, y) = |x|^\pi + \sin y$ e $\partial_y f = |x|^\pi + \cos y$ sono continue in $\mathbb{R}^2$, inoltre f e $\partial_y f$ sono limitate in $K \times \mathbb{R}$ per ogni intervallo compatto $K \subset \mathbb{R}$, pertanto vale il teorema di esistenza e unicità in grande.

(b) VERO. Dal teorema di reoglarità, essendo $f(x, y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, la soluzione $y = y(x) \in C^4(\mathbb{R})$.

(c) FALSO. Se per assurdo la soluzione y fosse di classe $C^5(\mathbb{R})$, dall'equazione si avrebbe che $\phi(x) = |x|^\pi \in C^4(\mathbb{R})$, che è falso.

(d) VERO. Dall'equazione si ha che $\lim_{x\to\infty} y'(x) = \infty$, pertanto la soluzione è definitivamente monotona crescente e dunque il limite in questione esiste. Se fosse $\lim_{x\to\infty} y(x) = \ell < \infty$, dal teorema dell'asintoto si avrebbe $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$, che è falso.

A.A. 2009/2010 – Sessione Autunnale – 6 Settembre 2010

Esercizio 1. Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, si chiede di:

(a) calcolare $e^{\mathbb{A}x}$;
(b) scrivere l'integrale generale di $Y' = \mathbb{A}Y + B(x)$, ove $B(x) = (\cos x, \sin x)^T$;
(c) dire se la matrice $e^{\mathbb{A}x}$ è ortogonale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy parametrico $\begin{cases} y' = \dfrac{e^{2x}-1}{y} \\ y(1/2) = \varepsilon > 0 \end{cases}$ si chiede di:

(a) determinare $\varepsilon_0 > 0$ per il quale il problema dato ammette un'unica soluzione globale y per ogni $\varepsilon > \varepsilon_0$;
(b) verificare che per $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ la soluzione massimale y non è globale e determinare $I_{\max}$ in funzione di ε;
(c) determinare gli intervalli di monotonia della soluzione y.

Esercizio 3. Posto $\varphi_n(x) = \dfrac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}^+$, si chiede di:

(a) dimostrare per induzione che per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e k, $n \in \mathbb{N}^+$

$$\Gamma(x+k) = x(x+1)\dots(x+k-1)\Gamma(x),$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+k-1)} \left(1 + \frac{x+1}{n}\right)\left(1 + \frac{x+2}{n}\right)\dots\left(1 + \frac{x+k}{n}\right)\varphi_n(x+k);$$

(b) verificare che $\Gamma(x+m) = (x+m-1)\dots(x+k)\Gamma(x+k)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e m, $k \in \mathbb{N}$, con $m > k \geq 0$;
(c) provare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(x+k)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+k)}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e $k \in \mathbb{N}^+$.

Esercizio 4. Siano f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni periodiche tali che $\displaystyle\lim_{x\to\infty}[f(x) - g(x)] = 0$. Dimostrare che

(a) f e g hanno lo stesso periodo;
(b) $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\alpha} \sin(nx)$ è la serie di Fourier di una funzione f in $L^2_{2\pi}$ per oppurtuni $\alpha > 0$, determinare tali α, e dire per quali α risulti $f \in C_{2\pi}$.

Esercizio 5. Data $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \in [0, 1)$ e $f(x+1) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$; V F
(b) la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in $[0, 1]$; V F
(c) la pulsazione di f è 2π; V F
(d) la serie di Fourier di f converge a f in L^2_1. V F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Poichè $(x\mathbb{A})^{2n} = (-1)^n x^{2n}\mathbb{I}_2$ e $(x\mathbb{A})^{2n+1} = (-1)^n x^{2n+1}\mathbb{A}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, dall'assoluta convergenza della serie abbiamo

$$\begin{aligned} e^{\mathbb{A}x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x\mathbb{A})^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\mathbb{A})^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\mathbb{A})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\mathbb{I}_2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & \cos x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) L'integrale generale è dato per ogni $C = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$ da

$$Y(x) = e^{\mathbb{A}x}C + \Phi(x) = \begin{bmatrix} c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{bmatrix} + \Phi(x),$$

ove $\Phi(x) = e^{\mathbb{A}x}K(x)$, con $K'(x) = e^{-\mathbb{A}x}B(x)$, cioè

$$K'(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K(x) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x \cos x \\ x \sin x \end{bmatrix}.$$

(c) I vettori colonna della matrice Wronskiana $e^{\mathbb{A}x}$ sono linearmente indipendenti per ogni $x \in \mathbb{R}$, basta dunque verificare sono ortonormali per ogni $x \in \mathbb{R}$. Chiaramente $v_1 = (\cos x, \sin x)$ e $v_2 = (-\sin x, \cos x)$ sono due versori, essendo $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$, e sono anche ortogonali, in quanto $\langle v_1, v_2\rangle = -\cos x \sin x + \sin x \cos x = 0$. Dunque v_1 e v_2 costituiscono una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi $e^{\mathbb{A}x}$ è una matrice normale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (a) Qui $f(x,y) = (e^{2x} - 1)/y \in C^\infty(\Omega)$, ove l'aperto di definizione è l'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \neq 0\}$. Pertanto esiste ed è unica la soluzione massimale $y \in C^\infty(I_{\max})$ per ogni $\varepsilon > 0$. Chiaramente $y > 0$ in $I_{\max}$, in quanto la traiettoria deve giacere nella componente connessa di Ω da cui parte e $y \neq 0$. Pertanto l'equazione è equivalente a $(y^2)' = 2yy' = 2\,(e^{2x} - 1) = (e^{2x} - 2x)'$, cioè $y(x)^2 = e^{2x} - 2x + c$. Quindi dalla condizione iniziale ricaviamo che $\varepsilon^2 = y(1/2)^2 = e - 1 + c$, da cui otteniamo $c = \varepsilon^2 - e + 1$. Dunque deve essere $y(x)^2 = e^{2x} - 2x + \varepsilon^2 - e + 1 > 0$ per ogni $x \in I_{\max}$. Se vogliamo che $I_{\max} = \mathbb{R}$, cioè soluzione globale, deve essere $e^{2x} - 2x \geq \min_{x\in\mathbb{R}}[e^{2x} - 2x] = 1 > e - 1 - \varepsilon^2$, in quanto $x_0 = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto stretto della funzione $\varphi(x) = e^{2x} - 2x$ in $\mathbb{R}$. Pertanto deve essere $\varepsilon > \sqrt{e-2}$. In conclusione, $y(x) = \sqrt{e^{2x} - 2x + \varepsilon^2 - e + 1}$, con $I_{\max} = \mathbb{R}$ per ogni $\varepsilon > \varepsilon_0$, ove $\varepsilon_0 = \sqrt{e-2}$.

(b) Fissiamo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Di nuovo la soluzione massimale y del problema è data da $y(x) = \sqrt{e^{2x} - 2x + \varepsilon^2 - e + 1}$ e deve essere $\varphi(x) = e^{2x} - 2x > e - 1 - \varepsilon^2$ per ogni $x \in I_{\max}$, ove ora $\sigma_\varepsilon = e - 1 - \varepsilon^2 \in [1, e-1)$. Poiché $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \infty$, $\min_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x) = \varphi(0) = 1$, $\varphi(1/2) = e - 1 > \sigma_\varepsilon$, φ è strettamente decrescente in $\mathbb{R}^-$ e strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$, esiste uno e un solo valore $x_{\sigma_\varepsilon} \in [0, 1/2)$ tale che $\varphi(x_{\sigma_\varepsilon}) = \sigma_\varepsilon$. Dunque $I_{\max} = (x_{\sigma_\varepsilon}, \infty)$.

(c) Poiché $y > 0$ il segno di y' lo determina il segno di $e^{2x} - 1$. Ora $e^{2x} - 1 > 0$ se e solo se $x > 0$. Pertanto, se $\varepsilon > \varepsilon_0$ la soluzione y è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$, strettamente decrescente in $\mathbb{R}^-$ e 0 è un punto di minimo assoluto stretto per y in $\mathbb{R}$. Analogamente, se $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, essendo $0 \leq x_{\sigma_\varepsilon} < 1/2$, la soluzione y è strettamente crescente in $I_{\max} = (x_{\sigma_\varepsilon}, \infty)$.

Esercizio 3. (a) Cominciamo con il verificare la prima formula. Notiamo che essa sussiste per $k = 1$, essendo $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Supponiamo dunque che sia vera al passo k e dimostriamola al passo $k+1$. Infatti,

$$\Gamma(x+k+1) = (x+k)\Gamma(x+k) = x(x+1)\dots(x+k-1)(x+k)\Gamma(x),$$

come desiderato. Analogamente, la seconda formula è vera per $k=1$, essendo

$$\varphi_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{x+1+n}{xn}\varphi_n(x+1) = \frac{\varphi_n(x+1)}{x}\left(1+\frac{x+1}{n}\right).$$

Supponiamo ora che sia vera al passo k e dimostriamola al passo $k+1$. Risulta

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \frac{1}{x(x+1)\dots(x+k-1)}\left(1+\frac{x+1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{x+k}{n}\right)\varphi_n(x+k)\\ &= \frac{1}{x(x+1)\dots(x+k-1)}\left(1+\frac{x+1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{x+k}{n}\right)\frac{\varphi_n(x+k+1)}{x+k}\left(1+\frac{x+k+1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{x(x+1)\dots(x+k)}\left(1+\frac{x+1}{n}\right)\dots\left(1+\frac{x+k+1}{n}\right)\varphi_n(x+k+1),\end{aligned}$$

come affermato.

(b) Applicando (a) due volte, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e m, $k \in \mathbb{N}$, con $m > k \geq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}\Gamma(x+m) &= x(x+1)\dots(x+m-1)\Gamma(x) = \frac{x(x+1)\dots(x+m-1)}{x(x+1)\dots(x+k-1)}\Gamma(x+k)\\ &= (x+m-1)\dots(x+k)\Gamma(x+k),\end{aligned}$$

come richiesto.

(c) Da (a) risulta immediatamente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(x+k)} = \frac{\Gamma(x)}{x(x+1)\dots(x+k-1)\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+k)}.$$

Esercizio 4. (a) Siano $T_1 > 0$ e $T_2 > 0$ i periodi di f e g, rispettivamente. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $f(x+nT_1+T_2) - g(x+nT_1+T_2) = f(x+T_2) - g(x+nT_1)$ e l'espressione a primo membro tende a 0 per $n \to \infty$ per ipotesi. Dunque $\lim_{n\to\infty} g(x+nT_1) = f(x+T_2)$. D'altra parte $\lim_{n\to\infty}[g(x+nT_1) - f(x+nT_1)] = 0$ per ipotesi. Poiché f è T_1 periodica, segue che $\lim_{n\to\infty} g(x+nT_1) = f(x)$. Dall'unicità del limite abbiamo che $f(x+T_2) = f(x)$. Quindi esiste $m_1 \in \mathbb{N}$ tale che $m_1T_1 = T_2$, cioè il periodo di g è un multiplo del periodo di f. Analogamente, scambiando i ruoli di f e g, risulta che $m_2T_2 = T_1$, per un opportuno $m_2 \in \mathbb{N}$. In conclusione si ha $T_1 = m_2m_1T_1$, cioè $m_1 = m_2 = 1$ ed f e g hanno lo stesso periodo.

(b) Sia $T > 0$ il periodo comune di f e g. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $f(x) - g(x) = f(x+nT) - g(x+nT) \to 0$ per $n \to \infty$. Dunue $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) Chiaramente $0 < a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^\alpha \sim 2^{-\alpha}n^{-\alpha/2} \searrow 0$ ed è immediato verificare che $(a_n)_n \in \ell^2$ se $\alpha > 1$. In questo caso la serie assegnata converge in $L^2_{2\pi}$ e puntualmente a una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ per il teorema di Abel–Dirichlet. Inoltre $n\alpha_n \to 0$ per $n \to \infty$ se e solo se $1 - \alpha/2 < 0$, cioè $\alpha > 2$, e in questo caso $f \in C_{2\pi}$. Mentre $f \in L^2_{2\pi} \setminus C_{2\pi}$ se $1 < \alpha \leq 2$.

Esercizio 5. (a) FALSO. In quanto f non è continua in $\mathbb{R}$.

(b) FALSO. In quanto f non è continua in $[0,1]$.

(c) VERO. In quanto $\omega = 2\pi/T = 2\pi$, essendo qui $T = 1$.

(d) VERO. In quanto f è in L^2_1, essendo $\int_0^1 |f(x)|^2dx = \int_0^1 xdx = 1/2$.

A.A. 2009/2010 – Sessione Autunnale – 20 Settembre 2010

Esercizio 1. Data la matrice $\mathbb{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha-2 \\ \alpha+2 & -2 \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, si chiede di:

(a) dire per quali valori di α la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ non è diagonalizzabile e per quali valori lo è;
(b) determinare il valore α tale che $\mathbb{A}_\alpha^2 = \mathbb{O}$ e calcolare $e^{\mathbb{A}_\alpha x}$;
(c) scrivere l'integrale generale di $Y' = \mathbb{A}_\alpha Y + B(x)$, ove $B(x) = (1, x)^T$, in corrispondenza del parametro α determinato al punto (b).

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{\log(1+y)}{1+y^2} \\ y(0) = y_0 > -1 \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che il problema ammette un'unica soluzione massimale $y \in C^\infty$ in $I_{\max} = (\alpha, \beta)$, con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$;
(b) determinare il segno della soluzione al variare del dato iniziale $y_0 > -1$;
(c) determinare gli intervalli di monotonia della soluzione y al variare del dato iniziale $y_0 > -1$;
(d) dimostrare che l'intervallo massimale $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$, se $y_0 \geq 0$, mentre $(\alpha, \beta) = (-\infty, \beta)$, con $0 < \beta < \infty$, se $-1 < y_0 < 0$. In entrambi i casi calcolare $\lim_{x\to\alpha^+} y(x)$ e $\lim_{x\to\beta^-} y(x)$.

Esercizio 3. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione periodica f

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{\log(1+n)}, \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(1+n^2)\sqrt[n]{n!}}{n^3}[\cos(nx) + \sin(nx)];$$

determinare il periodo e precisare il tipo di convergenza.

Esercizio 4. Data la funzione periodica così definita

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [0, 1), \\ -x + 2 & \text{se } x \in [1, 2), \end{cases}$$

e $f(x+2) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$; V F
(b) la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in $[1, 2]$; V F
(c) la pulsazione di f è 2π; V F
(d) f è convessa. V F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il polinomio caratteristico di $\mathbb{A}_\alpha$ è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4 - \alpha^2 + 4 = \lambda^2 - \alpha^2$, pertanto la matrice in esame ha autovalori $\lambda = \pm\alpha$. Per $\alpha \neq 0$ gli autovalori sono distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile. Se $\alpha = 0$, l'unico autovalore di $\mathbb{A}_0$ è $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica pari a 2. Detto $v = (x, y)^T$ un autovettore associato, esso deve soddisfare

$$\mathbb{A}_0 v = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cioè } x = y.$$

Quindi l'autospazio associato è generato da $v = (1,1)^T$ e ha dimensione 1. La molteplicità algebrica dell'unico autovalore $\lambda = 0$ è diversa dalla molteplicità geometrica e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

(b) Risulta

$$\mathbb{A}_\alpha^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix},$$

quindi $\mathbb{A}_\alpha^2 = \mathbb{O}$ se e solo se $\alpha = 0$. Dunque $\mathbb{A}_0^k = \mathbb{O}$ per ogni $k \geq 2$ e

$$e^{\mathbb{A}_0 x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}_0 x)^k}{k!} = \mathbb{I} + \mathbb{A}_0 x = \begin{bmatrix} 1+2x & -2x \\ 2x & 1-2x \end{bmatrix}.$$

(c) L'integrale generale è dato per ogni $C = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$ da

$$Y(x) = e^{\mathbb{A}_0 x} C + \Phi(x) = \begin{bmatrix} 2(c_1 - c_2)x + c_1 \\ 2(c_1 - c_2)x + c_2 \end{bmatrix} + \Phi(x),$$

ove $\Phi(x) = e^{\mathbb{A}_0 x} K(x)$, con $K'(x) = e^{-\mathbb{A}_0 x} B(x)$, cioè

$$K'(x) = \begin{bmatrix} 1-2x & 2x \\ -2x & 1+2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2 - 2x + 1 \\ 2x^2 - x \end{bmatrix}, \quad K(x) = \begin{bmatrix} 2x^3/3 - x^2 + x \\ 2x^3/3 - \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix},$$

pertanto

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} -x^3/3 + x^2 + x \\ -x^3/3 + 3x^2/2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. (a) Qui $f(x,y) = \log(1+y)/(1+y^2) \in C^\infty(\Omega)$, ove l'aperto di definizione è l'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$. Pertanto esiste ed è unica la soluzione massimale $y \in C^\infty(I_{\max})$ per ogni $y_0 > -1$. Chiaramente $y > -1$ in $I_{\max}$, in quanto la traiettoria deve giacere nella componente connessa di Ω da cui parte.

(b) La funzione $\phi \equiv 0$ è soluzione banale dell'equazione. Pertanto, dall'unicità risulta che, se $y_0 > 0$, la soluzione y è sempre positiva; se $-1 < y_0 < 0$, si ha che $y < 0$ in $I_{\max} = (\alpha, \beta)$, $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$. Infine se $y_0 = 0$ l'unica soluzione del problema è quella banale che è globale.

(c) Poiché $1 + y^2 > 0$, il segno di y' lo determina il segno di $\log(1+y)$. Ora $\log(1+y) > 0$ se e solo se $y > 0$. Pertanto, dal punto (b) si ha che se $y_0 > 0$ la soluzione y è strettamente crescente in $I_{\max}$; se $-1 < y_0 < 0$, la soluzione y è strettamente decrescente in $I_{\max}$. Il caso $y_0 = 0$ è banale.

(d) Se $y_0 = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Sia $y_0 > 0$. Dai punti (b) e (c) sappiamo che la soluzione y è strettamente positiva e crescente, pertanto $\lim_{x\to\beta^-} y(x) = \ell_1 \in (y_0, \infty]$. Se $\ell_1 \in (y_0, \infty)$, allora $\lim_{x\to\beta^-} y'(x) = \log(1+\ell_1)/(1+\ell_1^2) < \infty$. Dunque la soluzione è di classe $C^1([y_0, \beta])$. Questo contraddice la massimalità di β. Dunque $\lim_{x\to\beta^-} y(x) = \infty$. Chiaramente $0 < y'(x) \leq \log(1+y(x)) \leq y(x)$ per ogni $x \in I_{\max}$, da cui per integrazione in $(0,x)$ si ottiene $y(x) \leq y_0 e^x$. Pertanto, se $\beta < \infty$ risulterebbe $\lim_{x\to\beta^-} y(x) \leq y_0 e^\beta$, che è impossibile per il passo precedente. Dunque $\beta = \infty$. Analogamente, si prova che $\alpha = -\infty$. Infatti, $\lim_{x\to\alpha^+} y(x) = \ell_2 \in [0, y_0)$. Se fosse $\ell_2 > 0$ si avrebbe una contraddizione con la massimalità di α, pertanto $\ell_2 = 0$. Ora, poiché

$0 < y'(x) \le y(x)$, integrando in $(x, 0)$ si ha $y(x) \ge y_0 e^x$. Se fosse $\alpha > -\infty$, passando al limite per $x \to \alpha^+$, si avrebbe $0 \ge y_0 e^\alpha > 0$, che è assurdo. Pertanto $\alpha = -\infty$. In conclusione, se $y_0 > 0$, la corrispondente soluzione massimale y è globale.

Sia ora $-1 < y_0 < 0$. Dai punti (b) e (c) sappiamo che la soluzione y è strettamente negativa e decrescente. Quindi $-1 < y(x) < 0$ per ogni $x \in I_{\max}$. Come sopra $\alpha = -\infty$. Infatti $\lim_{x\to\alpha^+} y(x) = \ell_2 \in (y_0, 0]$. Se fosse $\ell_2 < 0$, risulterebbe y di classe $C^1([\alpha, y_0])$, contraddicendo la massimalità di α, pertanto $\ell_2 = 0$. Ora, anche in questo caso si ha $0 < y'(x) \le y(x)$, da cui integrando in $(x, 0)$ si ha $y(x) \ge y_0 e^x$. Pertanto $\alpha = -\infty$. Ora $\lim_{x\to\beta^-} y(x) = \ell_1 \in [-1, y_0)$. Se $\ell_1 > -1$, allora y risulterebbe di $C^1([y_0, \beta])$, contraddicendo la massimalità di β. Dunque $\ell_1 = -1$. Pertanto, $\lim_{x\to\beta^-} y'(x) = -\infty$. Quindi dal teorema dell'asintoto $\beta < \infty$.

Esercizio 3. Dal teorema di Abel–Dirichlet sappiamo che la serie (i) converge puntualmente in $\mathbb{R}$ ad una funzione $f \in \mathcal{M}_\pi$, in quanto $(1/[\log(1+n)])_n$ è una successione non crescente di numeri reali positivi tale che $\lim_{n\to\infty} 1/[\log(1+n)] = 0$ e $T = 2\pi/\omega = \pi$. La convergenza ad f non è uniforme ed $f \notin C_\pi$, essendo $\lim_{n\to\infty} n/[\log(1+n)] = \infty \ne 0$. Inoltre (i) non converge ad f in L^1_π. Infatti $\sum_{n=1}^\infty 1/[n\log(1+n)] = \infty$, essendo $1/[n\log(1+n)]$ asintotica a $1/[(1+n)\log(1+n)]$ all'infinito e, definita la funzione $\phi(x) = 1/[(x+1)\log(x+1)]$ positiva e decrescente per $x \ge 1$, risulta

$$\int_1^\infty \phi(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{(x+1)\log(x+1)}dx = \lim_{a\to\infty} [\log\log(a+1) - \log\log 2] = \infty.$$

In conclusione la serie (i) non è serie di Fourier di alcuna funzione $f \in L^1_\pi$.

Ora, detto $a_n = \zeta(1+n^2)\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n^3}$, risulta $a_n \sim \dfrac{1}{e\cdot n^2}$ per $n \to \infty$. Infatti, $\lim_{n\to\infty} \zeta(1+n^2) = 1$, mentre $0 < \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ e dal teorema di Cesaro risulta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e}$, essendo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{e}$. Ne consegue che la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ è asintotica ad una serie convergente, pertanto la serie (ii) converge totalmente (e quindi uniformemente) ad una funzione $f \in C_{2\pi}$ ($T = 2\pi/\omega = 2\pi$) ed è la sua serie di Fourier.

Esercizio 4. (a) VERO. In quanto $f \in C_2$ e l'intervallo $[0, 2]$ si può suddividere in due intervalli in cui f è monotona.

(b) VERO. La convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$, quindi lo è anche in $[1, 2]$.

(c) FALSO. La pulsazione di f è $\omega = 2\pi/T = \pi$.

(d) FALSO. Infatti, per $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{3}{2}$ si ha $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$, essendo $f(1) = 1 > \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$.

A.A. 2010/2011 – Sessione Invernale – 2 Febbraio 2011

Esercizio 1. Data la matrice $\mathbb{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \geq 1$, si chiede di:

(a) dire per quali valori di α la matrice $\mathbb{A}_\alpha$ non è diagonalizzabile e per quali valori lo è;
(b) determinare i valori di α per cui $\mathbb{A}_\alpha^2 = \mathbb{O}$ e calcolare, in corrispondenza ad essi, $e^{\mathbb{A}_\alpha x}$;
(c) scrivere l'integrale generale di $Y'(x) = \mathbb{A}_\alpha Y(x) + B(x)$, ove $B(x) = (2x, -1)^T$, in corrispondenza ad uno dei parametri α determinati al punto (b).

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{(2x^2+3)y}{(1+x^2)(1+e^y)}, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$ con $y_0 \in \mathbb{R}$, si chiede di:

(a) dimostrare che il problema ammette un'unica soluzione globale per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$;
(b) determinare il segno della soluzione y al variare del dato iniziale y_0;
(c) determinare gli intervalli di monotonia della soluzione y al variare di y_0;
(d) calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} y(x)$ e tracciare un grafico qualitativo della soluzione al variare di y_0.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x) = \pi + |x|$ in $[-\pi, \pi)$ e prolungata a tutto $\mathbb{R}$ con periodicità 2π

(a) si determini la serie di Fourier di f;
(b) si studi la convergenza della serie di Fourier ad f;
(c) si determini il valore $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Esercizio 4. (a) Data la serie trigonometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + e^{-n^2}) \sin(2nx)$ dire se è la serie di Fourier di una funzione periodica f, ed in caso affermativo, determinare il periodo e precisare il tipo di convergenza.

(b) Data $f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x$, determinare i coefficienti del suo polinomio di Fourier t_3, utilizzando note formule trigonometriche e senza calcolare gli integrali. Riconoscere che $f(x) = t_3(x)$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| \geq 1$, il polinomio caratteristico di $\mathbb{A}_\alpha$ è $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha^2 + 1$, pertanto la matrice in esame ha autovalori $\lambda = \pm\sqrt{\alpha^2 - 1}$. Per $\alpha \neq \pm 1$ gli autovalori sono distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile. Se $\alpha = \pm 1$, l'unico autovalore di $\mathbb{A}_\alpha$ è $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica pari a 2. Detto $v = (x, y)^T$ un autovettore associato, esso deve soddisfare

$$\mathbb{A}_0 v = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cioè } x = -\alpha y.$$

Quindi l'autospazio associato è generato da $v = (-\alpha, 1)^T$ e ha dimensione 1. La molteplicità algebrica dell'unico autovalore $\lambda = 0$ è diversa dalla molteplicità geometrica e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

(b) Risulta

$$\mathbb{A}_\alpha^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 - 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 - 1 \end{bmatrix},$$

quindi $\mathbb{A}_\alpha^2 = \mathbb{O}$ se e solo se $\alpha = \pm 1$. Dunque $\mathbb{A}_\alpha^k = \mathbb{O}$ per ogni $k \geq 2$ se $\alpha = \pm 1$ e in tal caso

$$e^{\mathbb{A}_\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}_\alpha x)^k}{k!} = \mathbb{I} + \mathbb{A}_\alpha x,$$

così che

$$e^{\mathbb{A}_1 x} = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ -x & 1-x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{\mathbb{A}_{-1} x} = \begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix}$$

(c) L'integrale generale è dato per ogni $C = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$ da $Y(x) = e^{\mathbb{A}_\alpha x} C + \Phi(x)$, ove $\Phi(x) = e^{\mathbb{A}_\alpha x} K(x)$, con $K'(x) = e^{-\mathbb{A}_\alpha x} B(x)$.

Caso $\alpha = 1$. Si ha

$$K'(x) = \begin{bmatrix} -x+1 & -x \\ x & x+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x^2 + 3x \\ 2x^2 - x - 1 \end{bmatrix}, \quad K(x) = \begin{bmatrix} -2x^3/3 + 3x^2/2 \\ 2x^3/3 - x^2/2 - x \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x^3/3 + x^2/2 \\ -x^3/2 - x^2/2 - x \end{bmatrix}$$

e conseguentemente

$$Y(x) = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)x + c_1 \\ -(c_1 + c_2)x - c_2 \end{bmatrix} + \Phi(x).$$

Caso $\alpha = -1$. Si ha

$$K'(x) = \begin{bmatrix} 1+x & -x \\ x & 1-x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2 + 3x \\ 2x^2 + x - 1 \end{bmatrix}, \quad K(x) = \begin{bmatrix} 2x^3/3 + 3x^2/2 \\ 2x^3/3 + x^2/2 - x \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} -x^3/2 + x^2/2 \\ -x^3/2 - x^2/2 - x \end{bmatrix}$$

e conseguentemente

$$Y(x) = \begin{bmatrix} (c_2 - c_1)x + c_1 \\ (c_2 - c_1)x + c_2 \end{bmatrix} + \Phi(x).$$

Esercizio 2. (a) Qui $f(x,y) = (2x^2+3)y/(1+x^2)(1+e^y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pertanto, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste ed è unica la soluzione massimale $y \in C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre, essendo $|f(x,y)| \le [2+3/(1+x^2)]|y| \le 5|y|$, tale soluzione è globale.

(b) Se $y_0 = 0$, l'unica soluzione del probelma è la soluzione banale $y \equiv 0$. Se $y_0 > 0$ allora ha $y > 0$ in $\mathbb{R}$, e analogamente $y < 0$ in $\mathbb{R}$ se $y_0 < 0$, in quanto la traiettoria deve giacere nella componente connessa di $\mathbb{R}^2$ da cui parte.

(c) Il caso $y_0 = 0$ è banale. Se $y_0 > 0$ allora, $y' > 0$ essendo $y > 0$ in $\mathbb{R}$, cioè la soluzione è monotona crescente in $\mathbb{R}$. Infine, se $y_0 < 0$ allora, $y' < 0$ essendo $y < 0$ in $\mathbb{R}$, cioè la soluzione è monotona decrescente in $\mathbb{R}$.

(d) I limiti richiesti esistono in virtù della monotonia della soluzione. Il caso $y_0 = 0$ è banale. Sia $y_0 > 0$. In tal caso poniamo $\ell = \lim_{x\to-\infty} y(x) \in [0, y_0)$ e $L = \lim_{x\to\infty} y(x) \in (y_0, \infty]$. Poiché $\ell \in \mathbb{R}$ per il Teorema dell'asintototo deve essere $\lim_{x\to-\infty} y'(x) = 2\ell/(1+e^\ell) = 0$, cioè $\ell = 0$. D'altra parte, se fosse $L \in \mathbb{R}$, avremmo $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 2L/(1+e^L) \neq 0$ essendo $L > y_0 > 0$. Ciò è in contraddizione con il Teorema dell'asintoto, pertanto $L = \infty$.

Trattando in maniera analoga il caso $y_0 < 0$, si ha che $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

Esercizio 3. Essendo f pari, è sufficiente calcolare i coefficienti a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Il periodo è $T = 2\pi$ e la pulsazione è $\omega = 1$. Pertanto

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + |x|)dx = \frac{1}{\pi}\left\{2\pi^2 + 2\int_0^\pi x dx\right\} = 3\pi.$$

Inoltre, fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + |x|)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi + x)\cos nx dx.$$

Ora $\displaystyle\int_0^\pi \cos nx dx = 0$ e $\displaystyle\int_0^\pi x\cos nx dx = \left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}dx = \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$. Pertanto

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ pari}, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ dispari}, \end{cases}$$

e quindi

$$f(x) = \frac{3}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}.$$

(b) La serie di Fourier di f converge totalmente in $\mathbb{R}$ essendo dominata dalla serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

(c) Il valore di S si determina a partire da $f(0) = \pi$, da cui si ha $\pi = \dfrac{3}{2}\pi - \dfrac{4}{\pi}S$, e infine $S = \pi^2/8$.

Esercizio 4. (a) Per il teorema di Abel–Dirichlet la serie data non converge puntualmente ad alcuna f, in quanto $(\alpha_n)_n = (1 + e^{-n^2})_n$ è una successione monotona decrescente di termini positivi, ma $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \neq 0$.

(b) Utilizzando le formula di Werner

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

si vede che

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{e} \quad \sin^3 x = \sin x\sin^2 x = \frac{\sin x}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin x\cos 2x}{2}.$$

D'altra parte, dalla formula

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

si ha che

$$\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x).$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,$$

cioè $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1/2$, $a_3 = 0$, $b_1 = 3/4$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1/4$ e $a_n = b_n = 0$ per $n \geq 4$.

* *
* *