Compiti di Analisi Matematica 4 dell'A.A. 2001/2002

C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2001/02 – 19 Giugno 2002

Esercizio 1. Siano B_r, $0 < r \leq 1$, i cerchi di centro l'origine e raggio r del piano. Sia $f \in C^2(\overline{B_1})$ e sia $\varphi(r)$ la media di f su ∂B_r, cioè

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} f(x, y)ds.$$

Dimostrare che:

(a) $\varphi'(r) = \dfrac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} \dfrac{\partial f}{\partial \nu_e}(x, y)ds.$

Se inoltre f è armonica in B_1, dimostrare anche che:

(b) $\varphi'(r) \equiv 0$ in B_1;

(c) $f(0, 0) = \dfrac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r} f(x, y)ds.$

Esercizio 2. Sia $x_0 \in I$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $\mathbb{A}$ una matrice 2×2 continua in I. Posto

$$(P) \qquad \begin{cases} Y' = \mathbb{A}(x)Y, \\ Y(x_0) = Y_0, \end{cases}$$

(a) dimostrare che le uniche soluzioni Y_1 e Y_2 di (P), relative a $Y_0 = (1, 0)$ e $Y_0 = (1, 1)$, rispettivamente, costituiscono un sistema fondamentale;

(b) determinare, nel modo più veloce possibile, Y_1 e Y_2 quando

$$\mathbb{A}(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix};$$

(c) calcolare $e^{\mathbb{A}(x)}$.

Esercizio 3. Posto

$$I_n(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|e^{-|x|^\alpha} dx, \quad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

utilizzando la funzione Gamma, si chiede di calcolare:

(a) $I_n(\alpha)$ per ogni $\alpha > 0$ e ogni $n = 1, 2, \ldots$;

(b) $I_3(2)$;

(c) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha)$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$;

(d) $\lim\limits_{n \to \infty} I_n(1)$.

Esercizio 4. Data la forma differenziale lineare $\omega : A \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, ω di classe C^1, si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) Se ω è esatta, allora l'integrale curvilineo lungo la frontiera di ogni esagono contenuto in A è nullo; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) ω è localmente esatta in A se e solo se ω è chiusa in A; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) ω è esatta in A se e solo se ω è chiusa in A. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 5. Considerato il problema di Cauchy $y' = -y^5$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$ e la soluzione $y(x) = (4x + 16)^{-1/4}$, si chiede di

(a) dire se la soluzione è globale; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) determinare la soluzione del problema con dato iniziale $y(1) = \dfrac{1}{2}$. ....

A.A. 2001/02 – 4 Luglio 2002

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y - \log x}{1 + y^2}, \; x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

si chiede di:

(a) provare che esiste un'unica soluzione in piccolo $y = y(x)$ di (P);
(b) provare che $y = y(x)$ è globale;
(c) studiare la monotonia della soluzione in $\mathbb{R}^+$ e calcolare $\lim_{x \to +\infty} y(x)$;
(d) provare che $y'(x) \leq -\log x$, $\forall x \in]0,1[$, e dedurne che $\lim_{x \to 0^+} y(x) \geq -1$;
(e) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega_{a,b}(x, y) = \frac{2x + ay}{x^2 + y^2} dx - \frac{bx - 2y}{x^2 + y^2} dy,$$

si chiede di:

(a) determinare, se esistono, $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\omega_{a,b}$ è chiusa nel suo insieme di definizione;
(b) calcolare, nel caso in cui $\omega_{a,b}$ è chiusa, l'integrale curvilineo di $\omega_{a,b}$ lungo la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1;
(c) determinare, utilizzando il punto (b), i valori di a e b per cui $\omega_{a,b}$ è esatta nel suo dominio di definizione;
(d) calcolare, utilizzando il punto (b), $\int_C \omega_{4,4}$, dove C è l'ellisse di equazione $x^2 + 16y^2 = 4$.

Esercizio 3. Data la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 + y^2, \; x^2 + y^2 \leq 4\},$$

si chiede di:

(a) disegnare Σ;
(b) verificare che il campo $F = (F_1, F_2, F_3) = (x + y, z - y, x^3 y)$ è solenoidale in $\mathbb{R}^3$;
(c) riconoscere che F ammette un potenziale vettore U in $\mathbb{R}^3$;
(d) determinare U della forma $U = (0, U_2, U_3)$, dove

$$U_2 = \int_0^x F_3(t, y, z)\, dt - \int_0^z F_1(0, y, t)\, dt, \quad U_3 = -\int_0^x F_2(t, y, z)\, dt.$$

(e) calcolare il flusso di F attraverso Σ utilizzando il Teorema di Stokes (il versore ν, normale a Σ, sia orientato verso l'alto).

Esercizio 4. Data la funzione $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, con $C = C^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, f differenziabile in C, si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) f è convessa in C se e solo se $< \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1), x_2 - x_1 > \geq 0$ per ogni $x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$; V | F
(b) x_0 è punto critico per f se e solo se è punto di minimo assoluto; V | F
(c) se $n = 1$, f è strettamente convessa in C se e solo se $f''(x) > 0$ in C. V | F

Esercizio 5. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ed un rettangolo $R \subseteq \mathbb{R}^2$, si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) ν_e è definita su ∂R; V | F
(b) $\int_R \mathrm{div} f(x)\, dx = \int_{\partial R} < f(x), \nu_e(x) > dS.$ V | F

A.A. 2001/02 – 19 Luglio 2002

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y} - x, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

si chiede di dimostrare che:

(a) ammette una ed una sola soluzione massimale φ;
(b) $x = 1$ è un punto di massimo per φ;
(c) φ è prolungabile in $[1, \infty)$ ed ivi decrescente, ed è definita nell'intervallo massimale (a, ∞) con $a \in \mathbb{R}$;
(d) $\lim_{x \to a^+} \varphi'(x) = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$.

Esercizio 2. Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e ω la f.d.l. definita in A da

$$\omega(x,y) = \left[f(x^2+y^2) - \frac{y}{x^2+y^2} \right] dx + \left[g(x^2+y^2) + \frac{x}{x^2+y^2} \right] dy.$$

Si chiede se esistono coppie di funzioni f, $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$ tali che:

(a) ω è chiusa in A;
(b) ω è esatta in A.

Esercizio 3. Calcolare:

(a) per ogni $x > 0$ e $y > 0$, utilizzando la funzione Beta,

$$I(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du;$$

(b) $I(1/2, 1/2)$;
(c) per ogni $x > 0$, utilizzando la funzione Gamma,

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{s} \right)^{x-1} ds;$$

(d) $\mathcal{I}(1/2)$.

Esercizio 4. Il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

ammette come soluzione $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$. Si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) φ è unica; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
(b) φ è massimale; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
(c) φ è globale; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
(d) φ è soluzione dell'equazione in $[-1, 1]$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
(e) il problema non è autonomo; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
(f) determinare la soluzione del problema con dato iniziale $y(1) = 1$. ....

A.A. 2001/02 - 2 Settembre 2002

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{y - 2x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si chiede di dimostrare che:

(a) ammette un'unica soluzione locale $\varphi = \varphi(x)$;

(b) φ è prolungabile in $[0, +\infty[$ ed è ivi strettamente crescente, ed è definita nell'intervallo massimale $]a, +\infty[$, $a \in I\!R$;

(c) $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Esercizio 2. Sia ω la f.d.l. definita in $I\!R^2$ da

$$\omega(x, y) = [3x^2 y + y f(x^2)]dx + [y - x f(x^2)]dy.$$

(a) Determinare una funzione $f \in C^1(I\!R)$ tale che ω sia esatta in $I\!R^2$;

(b) calcolare, nel caso in cui ω sia esatta, un potenziale;

(c) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di rappresentazione cartesiana

$$y(x) = \arctan \frac{1 - \cos(3x)}{2 - \sin^2 x}, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Esercizio 3. Calcolare:

(a) per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$, utilizzando la funzione Beta,

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^\alpha \sqrt{u}};$$

(b) $I(4)$;

(c) $J(m, n) = \displaystyle\int_0^1 x^m \log^n x \, dx, \ n \in I\!N, \ m > -1.$

Esercizio 4. Data la f.d.l. ω definita da

$$\omega(x, y) = \arctan \frac{y}{x} dx + \log \sqrt{x^2 + y^2} dy,$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) ω è chiusa; | V | F |

(b) ω è localmente esatta; | V | F |

(c) ω è esatta nel suo dominio di definizione. | V | F |

Corso di Analisi Matematica II - II Modulo
C.d.L. in Matematica e in Fisica
A.A. 2001/02 - 2 Settembre 2002

Esercizio 1. Sia D la regione dello spazio delimitata dal piano $y = 1$ e dalle superfici $y = x^2$ e $y = z^2$. Si chiede di:

(a) disegnare D;
(b) calcolare il volume di D;
(c) calcolare l'area della superficie laterale di D;
(d) determinare il valore del flusso del campo

$$F(x, y, z) = (z, x^2 y, y^2 z)$$

uscente da ∂D.

Esercizio 2. Sia ω la f.d.l. definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$\omega(x, y) = [3x^2 y + yf(x^2)]dx + [y - xf(x^2)]dy.$$

(a) Determinare una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$;
(b) calcolare, nel caso in cui ω sia esatta, un potenziale;
(c) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di rappresentazione cartesiana

$$y(x) = \arctan \frac{1 - \cos(3x)}{2 - \sin^2 x}, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Esercizio 3. Calcolare

(a) per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$, utilizzando la funzione Beta,

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{du}{(1 + u)^\alpha \sqrt{u}};$$

(b) $I(4)$;
(c) $J(m, n) = \int_0^1 x^m \log^n x \, dx, \ n \in \mathbb{N}, \ m > -1.$

Esercizio 4. Data la f.d.l. ω definita da

$$\omega(x, y) = \arctan \frac{y}{x} dx + \log \sqrt{x^2 + y^2} dy,$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) ω è chiusa; V F
(b) ω è localmente esatta; V F
(c) ω è esatta nel suo dominio di definizione. V F

A.A. 2001/02 - 23 Settembre 2002

Esercizio 1. Dato il sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} u' = u - v + e^t, \\ v' = -4u + v - e^t, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

si chiede di determinare:

(a) l'integrale generale e una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato;
(b) l'integrale generale del sistema (1);
(c) l'espressione di $e^{A(t)}$.

Esercizio 2. Siano F il campo definito in $\mathbb{R}^3$ da

$$F(x,y,z) = \big(2(y+z), 2(x+z), 2(x+y)\big)$$

e Σ la superficie definita da

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, \quad x^2+y^2 \le 1, \quad z \ge 0\big\}.$$

Si chiede di :

(a) provare che esiste un potenziale vettore per F in $\mathbb{R}^3$;
(b) verificare che $V(x,y,z) = (z^2-y^2, x^2-z^2, y^2-x^2)$ è un potenziale vettore per F;
(c) disegnare Σ;
(d) calcolare il flusso di F uscente da Σ.

Esercizio 3. Posto

$$I_n(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x|^a}(1+|x|)}{|x|^{a+1}}\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1, \quad 0 < a < n-1,$$

utilizzando la funzione Gamma, si chiede di calcolare:

(a) $I_n(a)$, per ogni $n > 1$ e ogni $0 < a < n-1$;
(b) $I_8(2)$;
(c) $\lim_{n\to\infty} I_n(1)$;
(d) $\lim_{a\to 0^+} I_n(a)$ per ogni $n > 1$.

Esercizio 4. Dato il problema di Cauchy

$$(P)\qquad \begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) il problema è autonomo;	V F
(b) esiste una soluzione locale di (P);	V F
(c) esiste un'unica soluzione locale;	V F
(d) esiste una soluzione globale;	V F
(e) esiste un'unica soluzione globale.	V F

Corso di Analisi Matematica II - II Modulo
C.d.L. in Matematica e in Fisica
A.A. 2001/02 - 23 Settembre 2002

Esercizio 1. Siano $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 - x$,

$$D = \left\{(x,y,z) \in I\!R^3 : z^2 \leq 1 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}.$$

Si chiede di:

(a) disegnare D;
(b) determinare, se esistono, gli estremi relativi di f su $intD$;
(c) determinare gli estremi assoluti di f su D.

Esercizio 2. Siano F il campo definito in $I\!R^3$ da

$$F(x,y,z) = \big(2(y+z), 2(x+z), 2(x+y)\big)$$

e Σ la superficie definita da

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq 0\big\}.$$

Si chiede di :

(a) provare che esiste un potenziale vettore per F in $I\!R^3$;
(b) verificare che $V(x,y,z) = (z^2 - y^2, x^2 - z^2, y^2 - x^2)$ è un potenziale vettore per F;
(c) disegnare Σ;
(d) calcolare il flusso di F uscente da Σ.

Esercizio 3. Posto

$$I_n(a) = \int_{I\!R^n} \frac{e^{-|x|^a}(1+|x|)}{|x|^{a+1}}\, dx, \qquad n \in I\!N, \quad n > 1, \quad 0 < a < n-1,$$

utilizzando la funzione Gamma, si chiede di calcolare:

(a) $I_n(a)$, per ogni $n > 1$ e ogni $0 < a < n-1$;
(b) $I_8(2)$;
(c) $\lim\limits_{n \to \infty} I_n(1)$;
(d) $\lim\limits_{a \to 0^+} I_n(a)$, per ogni $n > 1$.

Esercizio 4. Dato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) il problema è autonomo;	V	F
(b) esiste una soluzione locale di (P);	V	F
(c) tale soluzione è unica;	V	F
(d) esiste una soluzione globale.	V	F
(e) esiste un'unica soluzione globale.	V	F

A.A. 2001/02 - 20 Gennaio 2003

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' = y^3 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

si chiede di dimostrare che:

(a) ammette un'unica soluzione locale $u = u(x)$;
(b) u è dispari e strettamente crescente;
(c) se $(-a, a)$ è l'intervallo massimale di definizione della u, risulta

$$a = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^4}{2}}}$$

e giustificare che a è finito.

Si chiede infine di tracciare un grafico qualitativo della u.

Esercizio 2. Sia ω la f.d.l. definita da

$$\omega(x,y) = \left(f(x+y) + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dx + \left(f(x-y) + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dy,$$

dove f è una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$.

(a) Determinare il dominio di ω;
(b) trovare delle condizioni su f affinché ω risulti chiusa, anche nel sottocaso in cui $f(0) = 0$;
(c) riconoscere che per tali f ω è localmente esatta;
(d) calcolare un potenziale locale quando $f(t) = t$.

Esercizio 3. Posto

$$I_n(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-|x|^\alpha}(|x|^\alpha + 1)}{|x|^\alpha} \, dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

utilizzando la funzione Gamma di Eulero,

(a) si dica per quali α risulta $I_n(\alpha) < \infty$;
(b) si calcoli $I_4(2)$;
(c) si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(2)}{\pi^{n/2}}$;
(d) si calcoli $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4. Data la f.d.l. ω definita da

$$\omega(x,y) = \frac{x}{y} dx - \frac{x^2}{2y^2} dy,$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) ω è chiusa;	V F
(b) ω è localmente esatta;	V F
(c) ω è esatta nel suo dominio di definizione.	V F

Corso di Analisi Matematica II - II Modulo
C.d.L. in Matematica V.O. e in Fisica
A.A. 2001/02 - 20 Gennaio 2003

Esercizio 1. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - (x^2 + y^2), (x, y) \in B\}$, ove $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$.

(a) Disegnare S;
(b) dimostrare che S è il sostegno di una superficie regolare;
(1) si calcoli $\displaystyle\int_{\partial S^+} \omega$, dove $\omega = -ydx - zdy + dz$;
(d) detta D la regione di spazio delimitata da S e dal piano $z = 0$, si calcoli

$$\int_{\partial D} \langle F, \nu_e \rangle \, d\sigma,$$

dove $F(x, y, z) = (ye^{x^2+y^2}, -xe^{x^2+y^2} + y, -z)$.

Esercizio 2. Sia ω la f.d.l. definita da

$$\omega(x, y) = \left(f(x + y) + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(f(x - y) + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy,$$

dove f è una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$.

(a) Determinare il dominio di ω;
(b) trovare delle condizioni su f affinché ω risulti chiusa, anche nel sottocaso in cui $f(0) = 0$;
(c) riconoscere che per tali f ω è localmente esatta;
(d) calcolare un potenziale locale quando $f(t) = t$.

Esercizio 3. Posto

$$I_n(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-|x|^\alpha}(|x|^\alpha + 1)}{|x|^\alpha} \, dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

utilizzando la funzione Gamma di Eulero,

(a) si dica per quali α risulta $I_n(\alpha) < +\infty$;
(b) si calcoli $I_4(2)$;
(c) si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(2)}{\pi^{n/2}}$;
(d) si calcoli $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4. Data la f.d.l. ω definita da

$$\omega(x, y) = \frac{x}{y} dx - \frac{x^2}{2y^2} dy,$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) ω è chiusa;	V	F
(b) ω è localmente esatta;	V	F
(c) ω è esatta nel suo dominio di definizione.	V	F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

A.A. 2001/02 - 4 Febbraio 2003

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y'' = (\arctan y)^2 + t^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

si chiede di dimostrare che:

(a) ammette un'unica soluzione locale $y = y(t)$;
(b) tale soluzione è globale;
(c) la soluzione è convessa;
(d)
$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{y(t)}{t^3} = \infty.$$

Esercizio 2. Sia ω_α la f.d.l. definita da

$$\omega_\alpha(x,y) = \log(x^2+y^2)dx + \alpha \arctan \frac{x}{y} dy.$$

(a) Determinare il dominio di ω_α;
(b) determinare α in modo che ω_α risulti chiusa;
(c) si calcoli, se possibile, un potenziale locale di ω_2.

Esercizio 3. Sia $s \in \mathbb{R}$ e si consideri

$$I_n(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|x|}|x|\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Utilizzando la funzione Gamma di Eulero,

(a) si dica per quali s risulta $I_n(s) < +\infty$;
(b) si calcoli $I_4(2)$;
(c) si calcoli $\lim\limits_{s\to+\infty} I_n(s)$ al variare di n in $\mathbb{N}$;
(d) si calcoli $\lim\limits_{s\to 0^+} s^{n+1} I_n(s)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$;
(e) si calcoli $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(1)$.

Esercizio 4. Data la f.d.l. ω definita da

$$\omega(x,y) = 2x\log(x^2+y)dx + \log(x^2+y)dy,$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) ω è chiusa; V F
(b) ω è localmente esatta; V F
(c) ω è esatta nel suo dominio di definizione. V F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Corso di Analisi Matematica II - II Modulo
C.d.L. in Matematica V.O. e in Fisica
A.A. 2001/02 - 4 Febbraio 2003

Esercizio 1. Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2-(x^2+y^2), (x,y) \in B\}$, ove $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2\}$.

(a) Disegnare S;
(b) dimostrare che S è il sostegno di una superficie regolare;
(c) si calcoli $\displaystyle\int_{\partial S^+} \omega$, dove $\omega = -ydx - zdy + dz$;
(d) detta D la regione di spazio delimitata da S e dal piano $z=0$, si calcoli

$$\int_{\partial D} \langle F, \nu_e \rangle \, d\sigma,$$

dove $F(x,y,z) = (ye^{x^2+y^2}, -xe^{x^2+y^2}+y, -z)$.

Esercizio 2. Sia ω_α la f.d.l. definita da

$$\omega_\alpha(x,y) = \log(x^2+y^2)dx + \alpha \arctan\frac{x}{y}dy.$$

(a) Determinare il dominio di ω_α;
(b) determinare α in modo che ω_α risulti chiusa;
(c) si calcoli, se possibile, un potenziale locale di ω_2.

Esercizio 3. Sia $s \in \mathbb{R}$ e si consideri

$$I_n(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|x|}|x| \, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Utilizzando la funzione Gamma di Eulero,

(a) si dica per quali s risulta $I_n(s) < +\infty$;
(b) si calcoli $I_4(2)$;
(c) si calcoli $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} I_n(s)$ al variare di n in $\mathbb{N}$;
(d) si calcoli $\displaystyle\lim_{s\to0^+} s^{n+1}I_n(s)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$;
(e) si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(1)$.

Esercizio 4. Data la f.d.l. ω definita da

$$\omega(x,y) = 2x\log(x^2+y)dx + \log(x^2+y)dy,$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) ω è chiusa; V | F
(b) ω è localmente esatta; V | F
(c) ω è esatta nel suo dominio di definizione. V | F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di Analisi Matematica 4
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2001–2002 – 20 Febbraio 2003

Esercizio 1) Dato il problema di Cauchy

$$(PC) \qquad \begin{cases} y' = y(1+y^2)\log x \\ y(1) = 1 \end{cases},$$

si chiede di:

(a) determinare le soluzioni costanti dell'equazione in (PC);
(b) studiare l'esistenza e l'unicità in piccolo delle soluzioni di (PC);
(c) studiare la monotonia della soluzione locale di (PC);
(d) risolvere (PC).

Esercizio 2) Sia ω la forma differenziale lineare definita da

$$\omega = \left[\frac{8x^3 - 6xy}{(y-x^2)(y-2x^2)} + \cos x\right] dx + \frac{2y - 3x^2}{(y-x^2)(y-2x^2)} dy,$$

si chiede di:

(a) disegnare il dominio Ω di ω;
(b) verificare che ω è chiusa in Ω;
(c) provare che ω è esatta su Ω e calcorarne una primitiva.

Esercizio 3) Utilizzando la funzione Beta, calcolare

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, \qquad \int_0^1 (1-x^3)^{-1/3} dx.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Analisi Matematica II – Modulo II
C.d.L. in Matematica e in Fisica V.O.
A.A. 2001/2002 – 20 Febbraio 2003

Esercizio 1) Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 2 - (x^2 + y^2), \ (x, y) \in B\}$, ove

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

(a) Disegnare S;
(b) dimostrare che S è il sostegno di una superficie regolare;
(c) si calcoli $\displaystyle\int_{\partial S^+} \omega$, dove $\omega = -y dx - z dy + dz$;
(d) detta D la regione di spazio delimitata da S e dal piano $z = 0$, si calcoli

$$\int_{\partial D} \langle F, \nu_e \rangle \, d\sigma,$$

dove $F(x, y, z) = (ye^{x^2+y^2}, -xe^{x^2+y^2} + y, -z)$.

Esercizio 2) Sia ω la forma differenziale lineare definita da

$$\omega = \left[\frac{8x^3 - 6xy}{(y - x^2)(y - 2x^2)} + \cos x \right] dx + \frac{2y - 3x^2}{(y - x^2)(y - 2x^2)} dy,$$

si chiede di:
(a) disegnare il dominio Ω di ω;
(b) verificare che ω è chiusa in Ω;
(c) provare che ω è esatta su Ω e calcorarne una primitiva.

Esercizio 3) Data la curva γ di equazione

$$z = xe^{-x^2}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

si chiede di:
(a) disegnare la superficie di rotazione Σ ottenuta ruotando γ di un giro completo intorno all'asse z;
(b) calcolare

$$\iint_\Sigma \sqrt{[1 - 2(x^2 + y^2)^2] e^{-2(x^2+y^2)} + 1} \, dS;$$

(c) calcolare

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

ove V è il solido avente Σ come superficie laterale.

N.B. Giustificare tutte le risposte!