Compiti ed Esercitazioni di Analisi Matematica 4 dell'A.A. 2002/2003

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di Analisi Matematica 4
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2002/03 - I Esercitazione - 28 Aprile 2003

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{(e^{-x^2}+1)^2} \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

si chiede di:

(a) provare che esiste un'unica soluzione y di (P) definita in (α, ∞), con $-\infty < \alpha < 0$;

(b) studiare la monotonia della soluzione y e calcolare

$$\lim_{x\to\infty} y(x), \qquad \lim_{x\to\alpha^+} y(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\alpha^+} y'(x);$$

(c) tracciare un grafico qualitativo della soluzione y.

Esercizio 2. Data l'equazione di Eulero

$$x^3y''' + 11x^2y'' + 30xy' + 18y = f(x), \qquad x > 0,$$

si chiede di determinare:

(a) l'integrale generale dell'omogenea associata;

(b) quell'integrale particolare dell'omogenea associata tale che

$$y(1) = 2, \quad \lim_{x\to\infty} x^2y(x) = 0, \quad \int_1^\infty y(x)\,dx = 0;$$

(c) l'integrale generale dell'equazione completa quando $f(x) = 6(\log x - 1)$.

Esercizio 3. Dato l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\cos x,$$

si chiede di determinare:

(a) l'integrale generale di (1);

(b) la soluzione di (1) tale che $y(0) = 1$ e $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi e^{-\pi}}{4}$.

Esercizio 4. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y = xy' - (y')^3 \\ y(3) = 4 \end{cases},$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) il problema è in forma canonica; V F

(b) ammette integrale singolare; V F

(c) ogni soluzione è globale; V F

(d) ammette un'unica soluzione. V F

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di Analisi Matematica 4
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2002/03 - II Esercitazione - 12 Giugno 2003

Esercizio 1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} u' = 3u - 4v + e^{-x} \\ v' = u - v + x \end{cases},$$

si chiede di determinare:

(a) una matrice fondamentale;
(b) l'integrale generale del sistema completo;
(c) la matrice e^{xA}, ove A è la matrice dei coefficienti del sistema omogeneo.

Esercizio 2. Data la f.d.l. definita da

$$\omega(x,y) = \frac{e^p x - (p-1)^2 y}{x^2+y^2}dx + \frac{e^p y + (p-1)^2 x}{x^2+y^2}dy, \quad p \in \mathbb{R},$$

si chiede di:

(a) determinare il dominio Ω di ω e provare che ω è chiusa in Ω;
(b) calcolare $\int_{\gamma_1} \omega$, ove $\gamma_1 = \partial D$ con

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4, \;\; y \ge 0\};$$

(c) calcolare $\int_{\gamma_2} \omega$, ove γ_2 è la circonferenza unitaria centrata nell'origine;
(d) dedurre dal punto (c) per quali valori di $p \in \mathbb{R}$ la ω è esatta in Ω e calcolare un suo potenziale.

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = x(\cos x)^+, \quad x \in [-\pi, \pi); \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

Si chiede di:

(a) dedurre il tipo di convergenza della serie di Fourier di f dalla regolarità di f;
(b) determinare la serie di Fourier di f;
(c) calcolare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n(n-1)}.$$

(d) Riconoscere che la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha \log(\sqrt{n}+1)}, \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

non è la serie di Fourier di alcuna funzione $f \in L^2_{2\pi}$, determinandone inoltre il tipo di convergenza.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica II – Annuale*
C.d.L. in Matematica e Fisica V.O.
A.A. 2002/03 - 16 Luglio 2003

Esercizio 1. Data la funzione definita in $\mathbb{R}^n$ da
$$f(x) = \frac{|x|^2}{2n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$
si chiede di:

(a) verificare che f è positivamente omogenea di grado 2;
(b) calcolare $\Delta f(x)$;
(c) utilizzando l'identità di Eulero, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \nu_e}(x)$, ove $|x| = r$, $r > 0$, ν_e è la normale esterna a $\partial B_n(r)$ e $B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$;
(d) calcolare, utilizzando anche il punto (c),
$$\int_{\partial B_5(5)} f(x)dS.$$

Esercizio 2. Data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \left(x^n + n\right)^{1/n}, \qquad x \geq 0,$$
si chiede di:

(a) determinare il limite puntuale f;
(b) provare che $(f_n)_n$ converge uniformemente ad f in $[0, \infty)$.

Esercizio 3. Dato il solido
$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right\}$$
si chiede di:

(a) disegnare D;
(b) calcolare il volume di D;
(c) calcolare $\int_{\partial D} g(x, y, z)dS$, ove
$$g(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^4 + 4(x^2 + y^2)}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2002/03 - 4 Settembre 2003

Esercizio 1. Siano $p > 0$,

$$I = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2p} dx \qquad \text{e} \qquad J = \int_0^{\pi/2} (\cos 2x)^{2p} dx.$$

Si chiede di:

(a) calcolare I, esprimendo il suo valore in termini della funzione Gamma;
(b) verificare che J è uguale a I;
(c) calcolare infine in termini della Gamma $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin 2x)^{2p} dx$.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^3$ da

$$F(x, y, z) = 2(y + z,\, z + x,\, x + y)$$

si chiede di:

(a) verificare che F è solenoidale;
(b) calcolare un potenziale vettore.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log(y + 1) \\ y(0) = \alpha \geq 0 \end{cases},$$

si chiede di:

(a) provare che esiste un'unica soluzione y definita in tutto $\mathbb{R}$;
(b) tracciare un grafico qualitativo della soluzione y.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2002/03 - 24 Settembre 2003

Esercizio 1. Data la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x + \dfrac{\pi}{2}, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \\ |\cos x|, & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases} \qquad f(x) = f(-x), \quad x \in (-\pi, 0],$$

con $f(x + 2\pi) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si chiede di:

(a) provare che la serie di Fourier di f converge totalmente a f in $\mathbb{R}$;
(b) determinare la serie di Fourier di f;
(c) sapendo che $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$, calcolare la somma delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}.$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} u' = u + 2v + xe^{-x} \\ v' = 4u + 3v + 1 \end{cases},$$

si chiede di determinare:

(a) una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato;
(b) la matrice e^{Ax}, ove A è la matrice dei coefficienti del sistema omogeneo;
(c) l'integrale generale del sistema completo;
(d) l'insieme $\mathcal{Y}$ delle soluzioni limitate $Y = (u, v)$ in $\mathbb{R}_0^+$ e calcolare $\lim\limits_{x \to +\infty} Y(x)$.

Esercizio 3. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{xz}{x^2 + y^2} dx + \frac{yz}{x^2 + y^2} dy + f(x, y, z) dz,$$

definita su $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \neq (0, 0)\}$ e $f \in C^1(\Omega)$, si chiede di:

(a) determinare f in modo che ω sia chiusa in Ω;
(b) provare che $\oint_\gamma \omega = 0$, ove γ è il circuito $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, e dedurne che ω è esatta;
(c) determinare una primitiva P di ω tale che $P(1, 1, 1) = 0$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2002/03 - 19 Gennaio 2004

Esercizio 1. Data la funzione 2π–periodica definita in $\mathbb{R}$ da
$$f(x) = \sin\frac{x}{2}, \qquad x \in (-\pi, \pi], \qquad f(x + 2\pi) = f(x),$$
si chiede di:

(a) scrivere la serie di Fourier di f;
(b) studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier di f;
(c) posta $\quad h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi), \\ 0, & x = \pi, \end{cases} \qquad h(x + 2\pi) = h(x),$
verificare che la serie di Fourier di h è la stessa di f e converge puntualmente a h;
(d) stabilire se la serie di Fourier di h converge uniformemente a h in $(-\pi, \pi)$.

Esercizio 2. Data la forma differenziale lineare
$$\omega = \frac{2x - y}{x^2 + y^2}dx + \frac{2x + y}{x^2 + y^2}dy$$
si chiede di:

(a) verificare che ω è chiusa nel suo dominio D;
(b) provare che ω non è esatta in D;
(c) verificare che ω è esatta in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0, y \geq 0\}$;
(d) determinare una primitiva di ω in A.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - \log^2 x}{1 + y^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \tag{0.1}$$

si chiede di provare che:

(a) esiste un'unica soluzione y definita in $\mathbb{R}^+$;
(b) la soluzione y è tale che $0 < y(x) < -\log x$ in $(0, 1)$, mentre $-\log x < y(x) < 0$ in $(1, +\infty)$;
(c) la soluzione y è strettamente decrescente in $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e calcolare $\lim_{x\to\infty} y(x)$;
(d) $\lim_{x\to 0^+} y(x) \leq 2$;
(e) tracciare un grafico qualitativo della soluzione y.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di Analisi Matematica II - II Modulo
C.d.L. in Matematica V.O. e in Fisica
A.A. 2002/03 - 23 Aprile 2004

Esercizio 1. Data $\arctan \dfrac{y}{x} + \arctan \dfrac{x}{y}$, si chiede di:

(a) determinare il dominio D di f in $\mathbb{R}^2$ e calcolare ∇f in D;
(b) posto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, riconoscere che $f \in L^1(B)$ e calcolare nel modo più veloce possibile $\displaystyle\iint_B f(x,y)dxdy$;
(c) analogamente, posto $Q = [0,2]^2$, calcolare $\displaystyle\iint_Q f(x,y)dxdy$.

Esercizio 2. Data $f(x) = \log \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 2$, si chiede di:

(a) calcolare Δf e dire per quali valori di n la funzione f è armonica e il campo ∇f è solenoidale;
(b) riconoscere che $\Delta f \in L^1(B_r)$, ove $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq r\}$, $r > 0$, e calcolare $\displaystyle\int_{B_r} \Delta f(x)dx$;
(c) riconoscere che per $n = 3$ risulta $f \in L^1(B_1)$ e calcolare $\displaystyle\int_{B_1} f(x)dx$.

Esercizio 3. Sia $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$ e sia $f(x,y) = g(x^2) + g(y^2)$, ove $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente convessa e continua. Posto $\varphi(t) = g(t) + g(1-t)$, si chiede di:

(a) riconoscere che φ è strettamente convessa e continua in $[0,1]$ e calcolare $\max\limits_{[0,1]} \varphi$ e $\min\limits_{[0,1]} \varphi$, usando il fatto che $\varphi(t) = \varphi(1-t)$ per ogni $t \in [0, \frac{1}{2}]$;
(b) riconoscere che $2g(1/2) \leq \varphi(t) \leq g(0) + g(1)$ per ogni $t \in [0,1]$;
(c) determinare i punti di massimo e minimo di f vincolato a S e i rispettivi valori.

Esercizio 4. Data la curva γ di equazione polare $\varrho(\vartheta) = 1 - \sin\vartheta$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$, si chiede di

(a) dire se γ è una curva regolare;
(b) disegnare il sostegno della curva γ;
(c) calcolare l'area della porzione di piano D compresa tra l'asse delle x e il sostegno di γ;
(d) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{\varrho}\,ds$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!