Compiti d'Esame – A.A. 2003/2004

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di Analisi Matematica 4
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2003/04 - I Esercitazione - 23 Aprile 2004

Esercizio 1. Dato il sistema

$$\begin{cases} u' = \quad u - v \\ v' = -u + v \end{cases}$$

si chiede di determinarne:

(a) l'integrale generale e la matrice risolvente relativa al punto $x = 0$;

(b) la soluzione relativa al dato iniziale $Y(0) = (0, 1)^T$.

Esercizio 2. Data l'equazione di Eulero

$$x^4 y^{(iv)} + 8x^3 y''' + 2x^2 y'' - 20xy' + 36y = x^2 \qquad \text{in } \mathbb{R}^+$$

si chiede di determinare:

(a) l'integrale generale dell'omogenea associata;

(b) quelle soluzioni particolari dell'omogenea associata tali che

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \infty, \qquad \int_1^{\infty} y(x)\, dx = 0;$$

(c) l'integrale generale dell'equazione completa;

(d) quell'integrale particolare dell'equazione completa tale che

$$y(1) = 1, \qquad \int_0^1 y(x)\, dx = 1.$$

Esercizio 3. Data $\omega = \langle F, dx \rangle$, ove $F = (f_1, \ldots, f_n)$, con

$$f_i(x) = [h(r^2) + r^{-2}]x_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad r^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$, si chiede di:

(a) determinare il dominio A in $\mathbb{R}^n$ di ω;

(b) trovare condizioni su h affinché ω sia chiusa in A;

(c) riconoscere che ω è localmente esatta in A;

(d) determinare in funzione di $H(t) = \int_0^t h(s)ds$ la primitiva f di ω in A tale che $f(x) = 1$ quando $\|x\| = 1$.

Esercizio 4. Data l'equazione

$$y = xy' - (y')^\alpha, \qquad \alpha \in (0,1),$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) è in forma canonica; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(b) ammette integrale singolare; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(c) ogni soluzione è globale; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(d) il problema di Cauchy, con dato iniziale $y(0) = -1$,
ammette un'unica soluzione globale. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*

C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni

A.A. 2003/04 -II Esercitazione – 11 Giugno 2004

Esercizio 1. Data la funzione 2π-periodica definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = x(1 - 2|\cos x|), \qquad x \in (-\pi, \pi], \qquad f(x + 2\pi) = f(x),$$

si chiede di:

(a) determinare il tipo di convergenza della serie di Fourier di f;

(b) scrivere la serie di Fourier di f;

(c) calcolare la somma delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$, e dedurre da (b) la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

(d) stabilire se la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in $(-\pi, \pi)$.

Esercizio 2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{y} e^{y-x}\right) dx + \frac{1}{y}\left(1 - xe^{y-x}\right) dy,$$

si chiede di:

(a) trovare il dominio A di ω e stabilire che ω non è chiusa in A;

(b) determinare un fattore integrante del tipo $\mu(x, y) = f(x)g(y)$ affinchè $\tilde{\omega} = \mu\omega$ sia esatta;

(c) calcolare una primitiva di $\tilde{\omega}$;

(d) utilizzando i punti precedenti, fornire l'espressione implicita della soluzione locale del problema di Cauchy:

$$y' = -\frac{y - e^{y-x}}{1 - xe^{y-x}}, \qquad y(0) = 1.$$

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$y' = y^2 - \sin^2\left(\frac{x^2}{1 + x^2}\right), \qquad y(0) = 1,$$

si chiede di:

(a) provare che esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ definita in (α, β), $\alpha < 0 < \beta$;

(b) provare che $0 < y(x) < 1$ in $(\alpha, 0)$ e dedurne che $\alpha = -\infty$;

(c) provare che $y(x) > 1$ in $(0, \beta)$ e dedurne che $\beta < \infty$;

(d) studiare la monotonia di y e calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \beta^-} y(x);$$

(e) tracciare un grafico qualitativo della soluzione y.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2003/04 – 16 Giugno 2004

Esercizio 1. Date le funzioni

$$f(x) = \frac{1-|x|^3}{3(n+1)} \qquad \text{e} \qquad g(x) = (1-|x|^2)^p, \qquad x \in B_n, \qquad p > 0,$$

ove B_n è la boccia di $\mathbb{R}^n$ di raggio 1, si chiede di:

(a) calcolare Δf;

(b) provare, nel modo più veloce possibile, che

$$\int_{B_n} f(x)\Delta g(x)dx = \int_{B_n} g(x)\Delta f(x)dx;$$

(c) calcolare, utilizzando (b) e la funzione Beta,

$$I_n = \int_{B_n} f(x)\Delta g(x)dx;$$

(d) calcolare $\lim_{n\to\infty} I_n$ per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio 2. Data l'equazione di Eulero

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) - \alpha(\alpha+1)y = \frac{3}{\sqrt{x}}, \qquad x > 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

si chiede di determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,:

(a) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

(b) l'integrale generale dell'equazione completa;

(c) i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, tali che tutte le soluzioni dell'equazione completa siano infinitesime quando $x \to \infty$.

Esercizio 3. Dato il sistema

$$Y'(x) = AY(x) + B(x), \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 6xe^x \end{pmatrix}$$

si chiede di:

(a) determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato;

(b) calcolare la matrice e^{Ax};

(c) determinare l'integrale generale del sistema completo.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2003/04 - 2 Luglio 2004

Esercizio 1. Data la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log(\sqrt{n}+1)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

si chiede di provare che:

(a) converge puntualmente ma non uniformemente ad una funzione f 2π-periodica;

(b) $f \notin L^2_{2\pi}$;

(c) $f \notin L^1_{2\pi}$.

(d) Stabilire quali tra le seguenti serie è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \cos nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^{1/4}}\right) \sin nx.$$

Esercizio 2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = \langle f, dx \rangle, \quad f(x) = \frac{x}{|x|} \sin|x|, \quad x \in A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad n \geq 2,$$

si chiede di:

(a) verificare, nel modo più veloce possibile, che ω è esatta in A quando $n \geq 3$;

(b) provare che ω è esatta in A se $n = 2$;

(c) determinare una primitiva F di ω in A;

(d) calcolare ΔF e stabilire se il campo vettoriale f ammette un potenziale vettore in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$y' = y\,\frac{1 - 2\sin^2 y}{\pi - \arctan x}, \qquad y(0) = \alpha \in \mathbb{R},$$

si chiede di:

(a) riconoscere che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste un'unica soluzione $y_\alpha = y_\alpha(x)$ definita in tutto $\mathbb{R}$;

(b) studiare la simmetria e la monotonia di y_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x);$$

(d) tracciare un grafico qualitativo della soluzione y_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*

C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni

A.A. 2003/04 -19 Luglio 2004

Esercizio 1. Data la funzione 2π-periodica definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \sin\frac{x}{2}, \qquad x \in (-\pi, \pi], \qquad f(x + 2\pi) = f(x),$$

si chiede di:

(a) determinare il tipo di convergenza della serie di Fourier di f;

(b) scrivere la serie di Fourier di f;

(c) calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{4(2n+1)^2 - 1};$$

(d) utilizzando l'identità di Parseval la somma delle serie

$$\sum_{n=1} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{\dfrac{1+y^2}{1+x^4}} \cdot e^{-y^2} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) provare che ammette un'unica soluzione definita in tutto $\mathbb{R}$;

(b) studiare la monotonia della soluzione;

(c) dopo aver riconosciuto che $1/\sqrt[3]{1+x^4} \in L^1(1, \infty)$, dimostrare che

$$\lim_{x \to \infty} y(x) \in \mathbb{R};$$

(d) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x^2 - y^2 - 1}{2xy} \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) provare che esiste un'unica soluzione in piccolo;

(b) determinare l'espressione della soluzione in forma implicita mediante la tecnica del fattore integrante.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica V.O. e N.O. e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2003/04 - 17 Gennaio 2005

Esercizio 1. Data la funzione 2π-periodica definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (-\pi, 0), \\ \pi - x, & x \in [0, \pi], \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x),$$

si chiede di:

(a) riconoscere che la serie di Fourier di f converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e determinare il limite puntuale h;

(b) scrivere la serie di Fourier di f;

(c) dedurre da (b) la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2};$$

(d) stabilire se la serie di Fourier di f converge uniformemente a h in $(-\pi, \pi)$.

Esercizio 2. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = ([x^3 + 2xy + f(y)]dx + [xf(y) + x^2]dy, \qquad f \in C^1(\mathbb{R}),$$

si chiede di:

(a) determinare le funzioni f in modo tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$;

(b) calcolare le primitive di ω che si annullano in $(0, 0)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos y}{1 + y^2 + \arctan x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \tag{0.1}$$

si chiede di provare che:

(a) esiste un'unica soluzione y definita in $\mathbb{R}$;

(b) la soluzione y è tale che $-\pi/2 < y(x) < \pi/2$ in $\mathbb{R}$;

(c) la soluzione y è strettamente monotona crescente in $\mathbb{R}$ e calcolare

$$\lim_{x \to \infty} y(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} y(x);$$

(d) $$\int_0^{\infty} \frac{\cos y(x)}{1 + y(x)^2 + \arctan x^2} dx = \frac{\pi}{2} - 1;$$

(e) tracciare un grafico qualitativo della soluzione y.