Compiti d'Esame – A.A. 2004/2005

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di Analisi Matematica 4
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

A.A. 2004/2005 – I Esercitazione – 29 Aprile 2005

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y(y-1), \\ y(0) = y_0 \in (0,1), \end{cases}$ si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione massimale limitata $y = y(x)$;

(b) provare che y è globale;

(c) calcolare la soluzione.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = f(x,y), & f(x,y) = -\dfrac{2x^3y + 3x^2y^2}{\frac{1}{2}x^4 + 2x^3y + 1}, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) disegnare il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ di f;

(b) riconoscere che (P) ammette un'unica soluzione in piccolo per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$;

(c) fornire l'espressione esplicita di tale soluzione al variare di y_0.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare omogeneo

$$Y'(x) = \mathbb{A}Y(x), \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

si chiede di:

(a) determinare l'integrale generale;

(b) calcolare la matrice e^{Ax}.

Esercizio 4. Dato il sistema lineare

$$Y'(x) = \mathbb{A}\,Y(x) + B(x), \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -e^{3x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

si chiede di:

(a) determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato;

(b) calcolare l'integrale generale del sistema completo.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

A.A. 2004/2005 – II Esercitazione – 17 Giugno 2005

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - \arctan^2 y}{1 + e^{-x^2} + \sin^2 y}, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$ si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione massimale definita nel suo intervallo $I_{\max}$ e determinare $I_{\max}$ al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$;

(b) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Date le funzioni definite in $\mathbb{R}^n$ da

$$f(x) = \arctan |x|^2 - \frac{\pi}{4}, \qquad g(x) = (1 + |x|^4)^2,$$

si chiede di:

(a) calcolare $I_n = \int_{B_n} g(x)\Delta f(x)\, dx$ ove $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$;

(b) provare nel modo più veloce possibile che

$$\int_{B_n} \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx = -\int_{B_n} f(x)\Delta g(x) dx;$$

(c) calcolare per $n < 4$ e $\alpha > 0$

$$J(\alpha, n) = \int_{\mathbb{R}_n} \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle^{-1} e^{-|x|^{-\alpha}} dx$$

e fornire l'espressione esplicita di J(1/4,2);

(d) calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} g(x)\langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx.$$

Esercizio 3. Sia $k \to f_k : C \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni convesse definite in C, insieme convesso di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

(a) se $(f_k)_k$ converge puntualmente a f in C, allora f è convessa in C;

(b) se $(f_k)_k$ è una successione equilimitata in C, allora la funzione definita per ogni $x \in C$ da $s(x) = \sup_k f_k(x)$ è convessa in C;

(c) mostrare con un esempio che il minimo di funzioni convesse non è necessariamente una funzione convessa;

(d) mostrare con esempi che il limite e l'estremo superiore di funzioni strettamente convesse non è necessariamente una funzione strettamente convessa.

Esercizio 4. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1) \cos nx, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx + \cos nx}{n^{\varepsilon}(\log n)^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon \geq \frac{1}{2}.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.
Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2004/2005 – 27 Giugno 2005

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sin^3 y - y^3}{1+\cosh(x^2+y^2)-\sinh(x^2+y^2)}, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_0^+, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione massimale definita nel suo intervallo $I_{\max}$ e determinare $I_{\max}$ al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$;

(b) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Date le funzioni definite in $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ da

$$f(x) = \log(1+|x|^\alpha), \qquad g(x) = (1+|x|^\alpha)^2(1-|x|)^\beta, \qquad \alpha > 2, \qquad \beta > 0,$$

si chiede di:

(a) calcolare $\Delta f(x)$ in B_n;

(b) calcolare, utilizzando la funzione Beta, $I_{\alpha,\beta}(n) = \displaystyle\int_{B_n} g(x)\Delta f(x)\,dx$;

(c) calcolare, per ogni $\alpha > 2$,
$$\lim_{n\to\infty} I_{\alpha,1}(n);$$

(d) stabilire se esistono valori di α e n tali che il campo vettoriale $F = \nabla g$, con $\beta = 0$, ammetta un potenziale vettore in B_n.

Esercizio 3. Data $h : B \to \mathbb{R}$ definita in $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ da $h(x) = |x|\log|x|$ se $x \neq 0$ e $h(0) = 0$, si chiede di:

(a) dimostrare che h è continua in B;

(b) dimostrare che h è strettamente convessa in B;

(c) verificare che $h \in L^1(B)$ e calcolare $I_n = \displaystyle\int_{B_n} h(x)dx$;

(d) controllare che I_4 e I_6 sono minori di -0.6.

Esercizio 4. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\log\frac{n^2+1}{n^2-n}\right)\sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]\cos nx, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)(\sin nx + \cos nx).$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2004/05 - 13 Luglio 2005

Esercizio 1. Data la funzione 2π-periodica definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \dfrac{2}{3}(\pi - x), & x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \pi\right], \end{cases} \qquad f(-x) = -f(x), \qquad f(x+2\pi) = f(x),$$

si chiede di:

(a) determinare il tipo di convergenza della serie di Fourier di f;

(b) scrivere la serie di Fourier di f;

(c) dedurre da (b) la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

Esercizio 2. Data l'equazione di Eulero

$$x^2 y'' - 2(a+1)xy' = 5x^5, \qquad x > 0, \qquad a \in \mathbb{R},$$

si chiede di calcolare:

(a) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata al variare di $a \in \mathbb{R}$;

(b) per quali valori di a le soluzioni non costanti dell'omogenea associata sono prolungabili in $x = 0$;

(c) quelle soluzioni dell'omogenea associata tali che $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} \in \mathbb{R}$;

(d) l'integrale generale dell'equazione completa al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Data la forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y) = \frac{x^2 + y^2 - 12xy}{(x^2 - y^2)^2}dx + \frac{6x^2 + 6y^2 - 2xy}{(x^2 - y^2)^2}dy,$$

si chiede di:

(a) disegnare il dominio A di ω;

(b) provare, nel modo più veloce possibile, che ω è esatta in A;

(c) calcolare quella primitiva F di ω tale che $F(1,0) = 0$;

(d) stabilire la natura dell'insieme livello 0 di $F(x,y)$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2004/2005 – 28 Luglio 2005

Esercizio 1. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{xy}} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{xy}} \right) dy,$$

si chiede di:

(a) determinare il dominio A di ω;

(b) provare che ω è localmente esatta in A;

(c) determinare in forma implicita la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ y(-1) = \sqrt{3} - 2; \end{cases} \qquad (P)$$

(d) dedurre da (c) la legge della soluzione di (P) in forma esplicita.

Esercizio 2. Dato il sistema lineare

$$Y'(x) = \mathbb{A}Y(x) + B(x), \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} \\ -e^{4x} \end{pmatrix}$$

si chiede di:

(a) determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato;

(b) calcolare la matrice $e^{\mathbb{A}x}$;

(c) determinare la soluzione del sistema completo tale che $Y(0) = (1,1)^T$.

Esercizio 3. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}\log\sqrt{n}}\right) \sin nx, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(\log n)^{\log n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\arctan\frac{1}{n^3}\right)(\sin nx + \cos nx).$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2004/2005 – 5 Settembre 2005

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione massimale definita in $\mathbb{R}^+$;

(b) determinare
$$\lim_{x\to 0^+} y(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} y(x);$$

(c) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Data L'equazione di Eulero

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + ay(x) = x^4, \quad x > 0, \quad a \in (0,4),$$

si chiede di determinare:

(a) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

(b) l'integrale generale dell'equazione completa;

(c) il valore di $a \in (0,4)$ tale che tutte le soluzioni dell'equazione completa siano polinomi.

Esercizio 3. Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, convessa, si chiede di:

(a) provare che f è limitata superiormente da $M = \max\{f(a), f(b)\}$;

(b) esprimere x_m, ove x_m denota il punto medio di $[a,b]$, come combinazione convessa di $x_m + t$ e $x_m - t$, con $t \in \big[0, (b-a)/2\big]$;

(c) dedurre da (a) e (b) che f è limitata inferiormente.

(d) Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa e limitata, usando la monotonia del rapporto incrementale delle funzioni convesse, provare che g è costante.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2004/2005 – 23 Settembre 2005

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(3) = -1, \end{cases} \qquad f(x,y) := -\frac{2x(1+y^2)}{1-y^2-2x^2y},$$

si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione in piccolo;

(b) disegnare il dominio di f;

(c) determinare, utilizzando la tecnica del fattore integrante, la soluzione di (1) in forma implicita;

(d) dedurre da (c) la forma esplicita $x = x(y)$ della soluzione di (1).

Esercizio 2. Date le funzioni definite in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, da

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+|x|^2)}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) provare che $g \in C(B)$ e $\nabla g \in [L^1(B)]^n$, ove $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$;

(b) provare che

$$\int_B f(x) \cdot \nabla g(x)\, dx + \int_B g(x)\, \mathrm{div} f(x)\, dx = \log 2;$$

(c) dedurre da (b) che non vale la formula

$$\int_B \mathrm{div}\big[g(x) f(x)\big]\, dx = \int_{\partial B} g(x) f(x) \cdot \nu\, dS.$$

Esercizio 3. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{\log n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\big(\sqrt{n^4+1} - n^2\big) \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan \frac{1}{n^{3/2}}\right) (\sin nx + \cos nx).$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.
Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2004/2005 – 14 Novembre 2005

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-x^2} \arctan y + y^3, \\ \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

si chiede di:

(a) studiare esistenza e unicità in piccolo al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$;

(b) studiare il segno della soluzione y di (1) al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$;

(c) studiare eventuali simmetrie, la monotonia della soluzione e dedurre da (b) che y non può essere definita in tutto $\mathbb{R}$ se $y_0 \neq 0$;

(d) calcolare al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to\alpha^+} y(x)$ e $\lim_{x\to\beta^-} y(x)$, ove (α, β), $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$, è l'intervallo massimale di esistenza;

(e) tracciare un grafico qualitativo della soluzione al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{(1+y^2)}{(1+x^2)(2y\arctan x - 1)}, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{P}$$

si chiede di:

(a) discutere esistenza e unicità in piccolo;

(b) determinare in forma implicita, utilizzando la tecnica del fattore integrante, la soluzione di (P);

(c) dedurre da (b) la legge della soluzione di (P) in forma esplicita verificandone il valore assunto in $x = 0$.

Esercizio 3. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sin nx, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{e} - \sqrt[n+1]{e}\right)(\sin nx + \cos nx).$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2004/2005 – 13 Dicembre 2005

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x^2y^2 + x^2y - y^3}{x^2y^2 + xy^2 - x^3} \\ \\ y(1) = 1, \end{cases} \tag{P}$$

si chiede di:

(a) provare che esiste un'unica soluzione in piccolo;

(b) determinare in forma implicita la soluzione di (P);

(c) dedurre da (b) la legge della soluzione di (P) in forma esplicita.

Esercizio 2. Dato il sistema lineare

$$Y'(x) = \mathbb{A}Y(x) + B(x), \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ x \end{pmatrix}$$

si chiede di determinare:

(a) una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato;

(b) tutte le soluzioni limitate in $\mathbb{R}$ del sistema omogeneo associato;

(c) la matrice $e^{\mathbb{A}x}$;

(d) l'integrale generale del sistema completo.

Esercizio 3. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}[\log(\sqrt{n}+1)-(\log n)/2]\sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n\cos nx \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sin 1/n}-1\right)(\sin nx+\cos nx).$$

Esercizio 4. Data $f(x) = |x|\sin|x|$, $x \in A = A^\circ \subset \mathbb{R}^3$, stabilire se esiste una soluzione $U : A \to \mathbb{R}^3$ dell'equazione

$$\operatorname{rot} U = \nabla f \qquad \text{in } A.$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*

C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

A.A. 2004/2005 – 20 Gennaio 2006

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y(y^2-1)}{1+y+x^2e^{-x^2}}, \\ y(0) = y_0 \in (0,1), \end{cases}$$

si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione $y(x)$ definita in tutto $\mathbb{R}$ qualsiasi sia $y_0 \in (0,1)$;

(b) studiare la monotonia di $y(x)$ e calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} y(x);$$

(c) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Date le funzioni definite in $\mathbb{R}^n$ da

$$f(x) = e^{|x|^2} - 1, \qquad g(x) = e^{-2|x|^2},$$

si chiede di:

(a) calcolare $\Delta f(x)$;

(b) calcolare, utilizzando la funzione Γ, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\Delta f(x)\,dx$;

(c) stabilire se il campo vettoriale $F = \nabla f$ ammette un potenziale vettore in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Data $h : B \to \mathbb{R}$ definita in $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}$ da

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{|x|}-1}{|x|} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

si chiede di:

(a) dimostrare che h è continua in B;

(b) dimostrare che h è strettamente convessa in B;

(c) verificare che $h \in L^1(B)$ e calcolare $I_n = \displaystyle\int_{B_n} h(x)dx$;

(d) calcolare poi I_4 e I_5.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2004/2005 – 6 Febbraio 2006

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(1-e^{-y^2})\sin^2 x}{4+x^2+4\arctan(x^2+y)}, \\ y(0)=1, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione $y = y(x)$ definita in tutto $\mathbb{R}$;

(b) studiare la monotonia di y e provare che y è limitata in $\mathbb{R}$;

(c) provare che
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) \geq 1 - \frac{\pi}{4};$$

(d) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}} \sin nx, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(\log n)^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)(\sin nx + \cos nx).$$

Esercizio 3. Data $h : B_n \to \mathbb{R}$ definita in $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \pi/2\}$ da

$$h(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin|x|}{|x|} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

si chiede di:

(a) dimostrare che h è continua in B_n;

(b) dimostrare che h è strettamente convessa in B_n;

(c) verificare che $h \in L^1(B_n)$ e calcolare I_4 e I_5, ove $I_n = \displaystyle\int_{B_n} h(x)dx$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*

C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

A.A. 2004/2005 – 21 Febbraio 2006

Esercizio 1. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+y^4) + \frac{x^2}{x^2+y^4}\right] dx + \frac{2xy^3}{x^2+y^4} dy$$

si chiede di:

(a) determinare il dominio A di ω;

(b) verificare che ω è chiusa;

(c) calcolare $\int_\gamma \omega$ ove $\gamma = \partial D$ con $D = [-1,1] \times [-1,1]$;

(d) provare che ω è esatta;

(e) determinare la primitiva di ω che vale 1 in $(1,0)$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 3y + 2}{1 + e^{-x^2}\cosh(x^2+y^2)}, \\ y(0) = 3/2, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione $y = y(x)$ definita in tutto $\mathbb{R}$;

(b) studiare la monotonia di y e provare che y è limitata in $\mathbb{R}$;

(c) calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} y(x);$$

(c) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 3. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\sqrt{n^2+1} - n)\cos nx, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(\log n)^{1/3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{n/(n^2+1)} - 1\right)(\sin nx + \cos nx).$$

N.B. Giustificare tutte le risposte!