*

Compiti d'Esame – A.A. 2005/2006

*

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2005/2006 – I Esercitazione – 21 Aprile 2006

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy - \ln(xy) \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

si chiede di dimostrare che:

(a) ammette un'unica soluzione massimale $y = y(x)$;

(b) tale soluzione è globale a destra ma non a sinistra;

(c) la soluzione è convessa per $x > 1$ e concava per $x < 1$;

(d) $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$.

Esercizio 2. Risolvere

$$\begin{cases} y'' = e^y \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Tra tutte le soluzioni dell'equazione $u''' - 4u' = x$ determinare quelle per cui $\lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x^3} = 0$.

Esercizio 4. Risolvere $x^3u''' - 6xu' = x^3 \ln x$.

Esercizio 5. Considerato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} u' = |x|^e + \arctan\left(u - 1 + \dfrac{x^3 \ln(u^2+1)}{u}\right) \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) (P) ha un'unica soluzione globale $u > 0$; V | F

(b) u è di classe C^3 su $\mathbb{R}$; V | F

(c) u è di classe C^4 su $\mathbb{R}$; V | F

(d) $\lim_{x\to\infty} u(x) = \infty$. V | F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2005/2006 – II Esercitazione – 15 Giugno 2006

Esercizio 1. Si consideri il sistema

$$Y' = AY + B(x), \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ \sqrt{2}e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Si chiede di:

(a) calcolare $\det e^A$;

(b) calcolare una matrice fondamentale;

(c) calcolare e^{xA};

(d) risolvere il sistema.

Esercizio 2. Trovare la funzione continua $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$y(x) = x^2 + \int_0^x y(t) \sin 2(x-t)\, dt.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si ponga $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^\alpha} |x|^{3\alpha}\, dx$. Si chiede di:

(a) esprimere $I_n(\alpha)$ in termini della funzione Γ;

(b) calcolare $I_4(4)$;

(c) calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(\alpha)}{n^4 \Gamma(n/\alpha)}$.

Esercizio 4. Dire quale tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^\infty (e^{\sin n^{-3/5}} - 1) \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{\log(1+2^n)}{n!} \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^\infty \arctan\left(\log\left(1 + 10^{-7} n^{-1/2}\right)\right) \cos nx.$$

Esercizio 5. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente convessa. Si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) $g \circ h$ è strettamente convessa; | V | F |

(b) $g - h$ è strettamente concava; | V | F |

(c) $g + \dfrac{h}{3}$ è strettamente convessa; | V | F |

(d) $(g+h)\big|_{[0,1]}$ ha minimo. | V | F |

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2005/2006 – 19 Giugno 2006

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x^2 - y^2 - 1}{2xy} \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

(a) dimostrare che ammette un'unica soluzione massimale $y = y(x)$;

(b) trovare tale soluzione determinandone l'intervallo massimale;

(c) tracciare un grafico qualitativo della stessa.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^2 + ye^x, -y^2e^x/2, y - 2xz)$, si chiede di:

(a) discutere la risolubilità di

$$(*) \qquad\qquad \operatorname{rot} U = F;$$

(b) in caso affermativo, trovare tutte le soluzioni di $(*)$.

Esercizio 3. Assegnata la f.d.l.

$$\omega = x\big(y + f(y)\big)dx + \big(y^2 + \frac{x^2}{2}f(y)\big)dy,$$

(a) trovare l'unica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con $f(0) = 0$ tale che ω sia esatta;

(b) calcolare il potenziale F di ω con $F(0, 0) = 0$ e calcolare ΔF;

(c) detta g la funzione periodica di periodo 2π tale che $g(x) = F(x, x^2)$ se $x \in [-\pi, \pi)$, si chiede di stabilire il tipo di convergenza della sua serie di Fourier e concludere quindi che tale serie non può essere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(\ln n)^{1/3}}.$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa e positiva. Si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) f^2 è convessa; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(b) $\log f$ è convessa; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(c) e^f è convessa; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(d) f ha minimo in $\mathbb{R}^n$. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.
Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2005/2006 – 22 Giugno 2006

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (\arctan xy)^2 + |x|, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ si chiede di:

(a) riconoscere che ammette un'unica soluzione definita in tutto $\mathbb{R}$;

(b) studiare la monotonia e la simmetria della soluzione;

(c) determinare, dopo averne giustificato l'esistenza, $\lim_{x\to\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} y(x)$;

(d) calcolare $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} y(x)$ per ogni $\alpha < 2$;

(e) tracciare un qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Riconoscere che esiste unica funzione di classe C^1 definita in un intorno U di $x = -1$, tale che $y(-1) = 0$ e $y(x) = e^{y(x)} - x, \quad x \in U$. Tale funzione è definita in $x = 0$?

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$(P)_\alpha \qquad y' = \frac{y(e^{-x} + y^\alpha)}{2e^{-x} - \alpha y^\alpha}, \qquad y(0) = 1, \qquad \alpha \neq 2$$

si chiede di:

(a) riconoscere che esso ammette un'unica soluzione in piccolo;

(b) determinare, mediante la ricerca del fattore integrante della forma differenziale associata, la soluzione di $(P)_\alpha$ in forma implicita.

Esercizio 4. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right] \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sinh \frac{1}{n^2} \cos nx, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left[1 - \cos \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right] (\sin nx + \cos nx).$$

Esercizio 5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convessa e derivabile e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$. Si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) x_0 è un punto estremante relativo; V | F

(b) $f(x_0)$ è minimo assoluto; V | F

(c) $\ln f(x)$ ha minimo in x_0; V | F

(d) $e^{-f(x)}$ ha minimo in x_0; V | F

(e) $f(x) - (x - x_0)^2$ ha minimo in x_0; V | F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*

C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

A.A. 2005/2006 – 4 Luglio 2006

Esercizio 1. Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ e sia $u : B \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^3 con supporto compatto in B. Dimostrare allora che

$$\int_B (\Delta u)^2 dx = \int_B \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx.$$

Esercizio 2. Determinare l'unica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $f(0) = 0$ e per cui la f.d.l.

$$\omega = \left(\log(x+y) + \frac{f(x)}{x+y}\right) dx + \frac{f(x)}{x+y}\, dy$$

risulti chiusa. Calcolare poi il potenziale F di ω tale che $F(1,0) = 2$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} Y' = AY + B(x), \\ Y(0) = (1,2), \end{cases} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Si chiede di:

(a) calcolare e^A;

(b) calcolare una matrice fondamentale;

(c) calcolare e^{xA};

(d) risolvere il sistema.

Esercizio 4. Dire quale tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^\infty \sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1)^{7/10}\right)\sin nx, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{en^e + 3\cos(n^{17})}{\pi n^{2\pi} + \sin^{14}(n^\pi)}\cos nx, \quad \sum_{n=1}^\infty \sqrt{n}\sin(2n^{-7/6})\sin nx.$$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente assolutamente continua e periodica di periodo T. Si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) se f' è localmente limitata, la serie di Fourier di f converge totalmente a f; | V | F |

(b) la serie di Fourier di f converge uniformente a f; | V | F |

(c) la serie di Fourier di f' converge a f' in L^2_T. | V | F |

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.
Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2005/2006 – 5 Settembre 2006

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{\log\left[x(x^2y^2+1)/2\right]}{y^2+1}\right), \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) dimostrare che ammette un'unica soluzione massimale globale;

(b) studiare la monotonia di tale soluzione;

(c) giustificare l'esistenza $\lim_{x\to\infty} y(x)$ e calcolarlo;

(d) verificare che $\lim_{x\to 0^+} y(x) \le 1 + \pi/4$;

(e) verificare che $y(x) \le x$ per ogni $x \ge 1$ e che $y(x) \ge x$ per ogni $x \in (0,1]$;

(f) tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\left(\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}}\right) \sin nx$$

è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si ponga

$$I_n(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} (|x|^\alpha + 1) e^{-3|x|^{\alpha/3}} dx.$$

Si chiede di:

(a) verificare che $I_n(\alpha)$ è ben definita;

(b) esprimere $I_n(\alpha)$ in termini della funzione Γ di Eulero;

(c) calcolare $I_3(3)$;

(d) calcolare $\lim_{\alpha\to 0^+} 3^{3n/\alpha} I_n(\alpha)$.

Esercizio 4. Sia $f(x) = \dfrac{e^{|x|}-1}{|x|}$ se $x \ne 0$ e $f(0) = 1$. Sia poi $B_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}$, $n \ge 1$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) $\Delta f \in L^1(B_1^n)$ per ogni $n \ge 3$; V F

(b) $\Delta f \in L^1(B_1^2)$; V F

(c) $f'' \in L^1(B_1^1)$. V F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.
Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2005/2006 – 25 Settembre 2006

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-xy}{1+y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

si chiede di:

(a) dimostrare che ammette un'unica soluzione globale;

(b) studiare eventuali simmetrie della soluzione;

(c) studiare l'esistenza di $x_0 > 0$ tale che $y'(x_0) = 0$;

(d) studiare la convessità della soluzione in un intorno di $x = 0$.

(e) Tracciare infine un grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^{1/4}} - \frac{1}{n^{1/4}} \right) \cos nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+2n)}{n2^n} \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+e^{n^2}} \cos nx + \frac{2^n}{1+n} \sin nx \right).$$

Esercizio 3. Trovare le funzioni continue che risolvono le seguenti uguaglianze, determinandone il dominio di definizione:

$$\int_0^x y(t) \sin t \, dt = \ln(y(x)), \qquad \int_0^x y(t) e^{2x-t} \, dt = y(x) + x.$$

Esercizio 4. Sia $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa e dotata di punti di minimo e di massimo. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) l'insieme dei punti di minimo di f è un insieme convesso; V | F

(b) l'insieme dei punti di massimo di f è un insieme convesso; V | F

(c) se f è differenziabile e x_0 è di minimo, allora $df(x_0) = 0$; V | F

(d) se $f \geq 0$, allora f^α è convessa per ogni $\alpha > 0$. V | F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2005/2006 – 18 Dicembre 2006

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\big(\ln(y^2 + \dfrac{x}{x^2+1} + e)\big) + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

si chiede di:

a) riconoscere che ammette un'unica soluzione globale;

b) riconoscere che la soluzione è monotona crescente;

c) stimare i limiti della soluzione agli estremi del dominio;

d) stabilire se $y(4) \leq 2\pi + 2\sqrt{5} - 2$.

Esercizio 2. Discutere l'esistenza di una funzione continua definita in $[0, \infty)$ tale che

$$f(x) = x \ln x + 1 - x - \int_0^x f(t)\, dt \quad \forall\, x > 0$$

ed eventualmente calcolare tale funzione.

Esercizio 3. Dire quale tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(\cosh n^{-7/8} - 1) \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n \ln n} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \ldots + n}{2^n} \cos nx.$$

Esercizio 4. Data la f.d.l. in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\omega(x,y) = \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y2} dy,$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

(a) esiste una sola coppia di valori (α, β) per cui la forma è chiusa in D; V | F

(b) quando è chiusa, ω è localmente esatta in D; V | F

(c) quando è chiusa, ω è esatta in D; V | F

(d) $F(x,y) = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \pi$ è un potenziale in D. V | F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2005/2006 – 22 Gennaio 2007

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin nx,$$

e si consideri il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{f(x)}{x^2 + y^2 + 1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che (P) ammette un'unica soluzione globale $y = y(x)$;

(b) mostrare che tale soluzione è pari;

(c) mostrare che $v(x) = \arctan x + 1$ è una soprasoluzione;

(d) dire se $f \in L^1(0, 2\pi)$ e in caso affermativo calcolare $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

Esercizio 2. Trovare tutte le funzioni continue tali che

$$\int_0^{x^2} \phi(\sqrt{t})\,dt = \phi(x) - x^2 \qquad \text{per ogni } x \geq 0.$$

Esercizio 3 Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \log n} \cos nx; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \tan \frac{1}{\log n} \right) \sin nx; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{[\log(1 + 1/n)]^n} \cos nx.$$

Esercizio 4. Assegnata la f.d.l.

$$\omega(x, y) = y \log x\,dx + \big(g(x) + y\big)\,dy,$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) esiste un'unica funzione g di classe C^1 per cui ω è localmente esatta; V | F

(b) esiste un'unica funzione g di classe C^1 per cui ω è esatta; V | F

(c) esistono infiniti potenziali locali G_n di classe C^∞ tali che $G_n(1, 0) = 0$; V | F

(d) uno di tali potenziali è $G(x, y) = (x \log x - x)y$; V | F

(e) G è l'unico potenziale verificante (c). V | F

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di ***Analisi Matematica 4***

C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

A.A. 2005/2006 – 6 Febbraio 2007

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = \sin|y| + \arcsin \dfrac{1}{x^2+y^2+1} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che (P) ammette un'unica soluzione globale $y = y(x)$;

(b) mostrare che tale soluzione è dispari;

(c) mostrare che $y(x) > 0$ per ogni $x > 0$;

(d) mostrare che per ogni $x \geq 0$ risulta

$$\int_0^x \sin y(t)\,dt \leq y(x) \leq \int_0^x y(t)\,dt + \frac{\pi}{2}x.$$

Esercizio 2. Assegnata la f.d.l.

$$\omega = \big(2y + y^2 f(x)\big)dx + \big(2x + 2yf(x)\big)dy,$$

(a) trovare l'unica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con $f(0) = 1$ tale che ω sia esatta;

(b) calcolare il potenziale F di ω con $F(0,0) = 0$ e provare che $\Delta F(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(c) calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = \big(\arctan t^6, 2t^4 - t^3\big)$, $t \in [0,1]$.

Esercizio 3 Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{3}(e^{1/n} - 1)\right]^n \cos nx; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}} \cos nx; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tan\tan\frac{1}{n^{1/3}} \sin nx.$$

Esercizio 4. Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni convesse che converge puntualmente ad una funzione f. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) f è convessa in $[0,1]$; | V | F |

(b) se f_n è derivabile per ogni $n \in \mathbb{N}$, anche f lo è; | V | F |

(c) f è integrabile in $[e/7, e/3]$. | V | F |

N.B. Giustificare tutte le risposte!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*

C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

A.A. 2005/2006 – 22 Febbraio 2007

Esercizio 1. Data la famiglia di problemi di Cauchy

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} y' = |x| + y^2, \\ y(0) = \lambda > 0, \end{cases}$$

si chiede di:

a) riconoscere che (P_λ) ammette un'unica soluzione locale y_λ per ogni $\lambda > 0$;

b) riconoscere che y_λ è monotona crescente per ogni $\lambda > 0$;

c) riconoscere che esiste $x_\lambda < 0$ tale che $y_\lambda(x_\lambda) = 0$ per ogni $\lambda > 0$;

d) detto $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ l'intervallo massimale di definizione per y_λ, calcolare

$$\lim_{x \to \alpha_\lambda^+} y_\lambda(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to \beta_\lambda^-} y_\lambda(x);$$

e) calcolare $\lim_{\lambda \to \infty} \beta_\lambda$.

Esercizio 2. Discutere l'esistenza di una funzione continua f definita in un intorno del punto $x = 0$ tale che

$$\log f(x) = \int_0^x t^2 f(t)\, dt$$

ed eventualmente calcolare tale funzione determinandone l'intervallo massimale di definizione.

Esercizio 3. Dire quale tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$ ed in quali casi certamente $f \in C_{2\pi}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{n!} \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2+5}} \cos nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1 + 2^{-n}} \cos nx.$$

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si chiede di stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) esiste una ed una sola soluzione del problema $Y' = AY$, $Y(0) = (1, 1)$; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(b) $\det e^{tA} = 1$ e $\operatorname{tr} e^{tA} = 2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(c) esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $Y(t_0) = (0, 0)$; $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

(d) esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $Y'(t_0) = (0, 0)$. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$

N.B. Giustificare tutte le risposte!