* *

Compiti d'Esame – A.A. 2008/2009

* *

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltà di Scienze MM. FF. e NN.

Corso di *Analisi Matematica 4*
C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni
A.A. 2008/2009 – I Esercitazione – 24 Aprile 2009

Esercizio 1. La reazione tra idrogeno e bromo, assumendo concentrazioni iniziali unitarie, è governata dal problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2k(1-y)|1-y|^{1/2}, \quad k > 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

si chiede di

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione massimale y_k e che $y_k(x) < 1$ per ogni $x \in I_{\max,k}$;

(b) determinare l'espressione analitica della soluzione massimale y_k e $I_{\max,k}$;

(c) disegnare un grafico qualitativo di y_k in $I_{\max,k}$;

(d) mostrare che la successione $(y_n)_n$, $n = [k]$, converge puntualmente ma non uniformemente a $y \equiv 1$ in $\mathbb{R}^+$;

(e) dimostrare che $(y_n)_n$ converge uniformemente a $y \equiv 1$ in ogni insieme $J \subset \mathbb{R}^+$, con $\inf J > 0$.

Esercizio 2. Considerato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{x^2 + y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ si chiede di

(a) dimostrare che esso ha un'unica soluzione massimale y in $I_{\max}$;

(b) mostrare che $T_{\max} = \infty$, confrontando la soluzione con la retta $\varphi(x) = x$;

(c) dimostrare che la soluzione y è invertibile in $I_{\max}$ e determinare un'equazione implicita che verifica la soluzione massimale (sugg: l'inversa di y verifica un'equazione di Bernoulli...), e calcolare $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (x^2-1)(e^{-y^2}-1) \\ y(0) = \varepsilon > 0 \end{cases}$ si chiede di

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione massimale y_ε di classe C^∞;

(b) dimostrare che y_ε è globale a destra e a sinistra ed è positiva;

(c) determinare i punti di minimo e massimo locale di y_ε;

(d) calcolare $\lim_{x\to-\infty} y_\varepsilon(x)$ e $\lim_{x\to\infty} y_\varepsilon(x)$.

Esercizio 4. Data l'equazione di Eulero in $\mathbb{R}^+$

$$(E) \qquad x^3y''' + (1-\alpha)x^2y'' + \alpha xy' - \alpha y = -1 + \log x, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

si chiede di

(a) determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

(b) al variare di α, trovare le soluzioni z dell'omogenea tali che $\int_1^\infty \frac{z(x)}{x^2}dx$ è convergente;

(c) determinare i valori di α per i quali $\varphi(x) = \log x$ è un integrale particolare di (E).

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Chiaramente $f(x,y) = f(y) = 2k\begin{cases} (1-y)^{3/2}, & \text{if } y \leq 1 \\ -(y-1)^{3/2}, & \text{if } y \leq 1 \end{cases}$ è tale che $f \in C^1(\mathbb{R})$, con $f(1) = f'(1) = 0$. Pertanto ogni problema di Cauchy del tipo $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$, con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ammette soluzione massimale unica, in particolare questo vale per il nostro problema. Inoltre $y \equiv 1$ su $\mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale, quindi poiché $y(0) < 1$ si ha $y(x) < 1$ per ogni $x \in I_{\max}$.

(b) Quindi lungo la nostra soluzione $f(y) = 2k(1-y)^{3/2} > 0$ e, separando le variabili,

$$\int_0^y \frac{ds}{2(1-s)^{3/2}} = k\int_0^x ds, \qquad (1-s)^{-1/2}\Big|_0^y = kx,$$

da cui la soluzione verifica l'equazione implicita $[1-y(x)]^{-1/2} = kx+1$ da cui $x > -\dfrac{1}{k}$ essendo $[1-y(x)]^{-1/2} > 0$. Pertanto la soluzione cercata è $y(x) = 1 - \dfrac{1}{(kx+1)^2}$ definita nell'intervallo $\left(-\dfrac{1}{k}, \infty\right)$, che è $I_{\max}$ poiché $\lim_{x\to(-1/k)^+} y(x) = -\infty$.

(c) Poichè lungo la nostra soluzione $f(y) = 2k(1-y)^{3/2} > 0$ abbiamo $y' > 0$, cioè la soluzione y è monotona crescente in $I_{\max}$. Inoltre $y'' = -3k(1-y)^{1/2}y' < 0$ per $y < 1$ e quindi y è una funzione concava. Infine $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

(d) Dall'espressione esplicita si ricava facilmente che $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Tale limite non è uniforme poiché $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |y_n(x) - 1| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} (nx+1)^{-2} = 1$ il suo limite per $n \to \infty$ è 1 e non è

0, quindi la convergenza a $y \equiv 1$ non è uniforme in $\mathbb{R}^+$. Sia J un insieme di $\mathbb{R}^+$, con $\inf J = t > 0$. Allora

$$\sup_{x\in J} |y_n(x) - 1| = \sup_{x\in J} \frac{1}{(nx+1)^2} = \frac{1}{(nt+1)^2} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Quindi la convergenza è uniforme in tali insiemi J.

Esercizio 2. (a) Ovviamente $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y}$ è di classe $C^1(\Omega)$, ove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^+,\ y > -x^2\}$, per cui il problema di Cauchy ammette soluzione massimale unica tale che $(x, y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I_{\max}$.

(b) La retta di equazione $\varphi(x) = x$ è tale che $\varphi'(x) = 1 > f(x, \varphi(x)) = \dfrac{2}{x+1}$, per $x > 1$, da cui, usando il teorema del confronto si ha che $y(x) < x$ per $x > 1$; d'altra parte se $x < 1$ allora $\varphi'(x) < f(x, \varphi(x))$ e quindi $y(x) < x$ anche per $x < 1$. Ne segue che la soluzione sta sempre sotto la retta $\varphi(x) = x$, e quindi vive nella regione $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^+,\ -x^2 < y \leq x\}$. In U la funzione f è positiva, quindi $y(x)$ è monotona crescente in $I_{\max}$. In conclusione, $I_{\max} \subset \mathbb{R}^+$. Inoltre $T_{\max} = \infty$ poiché $-x^2 < y(x) \leq x$, in quanto altrimenti la soluzione sarebbe prolungabile, poiché y avrebbe limite $y(T_{\max}) \in (1, \infty)$ in $T_{\max}$ se $T_{\max} < \infty$.

(c) Essendo $y' > 0$ per ogni $x \in I_{\max}$ ne segue che la funzione è invertibile in tutto $I_{\max}$. Detta $x(y)$ l'inversa della soluzione, utilizzando la regola di derivazione della funzione inversa, si ottiene

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{x^2 + y}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right), \qquad x(1) = 1,$$

che è un'equazione di Bernoulli. Poiché $x > 0$ è legittima la sostituzione $z(y) = x(y)^2$ e si ottiene $z(y)' = z(y) + y$, con $z(1) = 1$, la cui soluzione unica è $z(y) = 3e^{y-1} - y - 1$ da cui una funzione implicita per l'equazione è $x^2 = 3e^{y-1} - y - 1$. In particolare, $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ in quanto $\lim_{y\to\infty} z(y) = \infty$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = (x^2 - 1)(e^{-y^2} - 1), \\ y(0) = \varepsilon > 0, \end{cases}$$

si chiede di

(a) dimostrare che (P) ammette un'unica soluzione massimale y_ε di classe C^∞;

(b) dimostrare che y_ε è globale a destra e a sinistra ed è positiva;

(c) determinare i punti di minimo e massimo locale di y_ε;

(d) calcolare $\lim_{x\to-\infty} y_\varepsilon(x)$ e $\lim_{x\to\infty} y_\varepsilon(x)$.

Esercizio 3. (a) Poiché $f(x, y) = (x^2 - 1)(e^{-y^2} - 1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, il nostro problema di Cauchy ammette unica soluzione massimale y_ε di classe $C^\infty(I_{\max})$.

(b) Poiché $y \equiv 0$ in $\mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione, si ha che se $y(x_0) > 0$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$ allora $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per questo motivo la soluzione y_ε è positiva. Quindi $|f(x, y)| = |x^2 - 1|(1 - e^{-y^2}) \leq |x^2 - 1|$, quindi per il teorema di esistenza globale la soluzione massimale è globale, cioè $I_{\max} = \mathbb{R}$.

(c) La funzione f è positiva per $y > 0$ e $-1 \leq x \leq 1$, nulla per $x = \pm 1$ e negativa altrove. Ne segue che la funzione y_ε è decrescente per $x < 1$ e per $x > 1$, crescente per $-1 < x < 1$ ed ha un minimo locale per $x = -1$ e un massimo locale per $x = 1$.

(d) La funzione è sempre positiva quindi $y_\varepsilon(-1) > 0$ e poiché è monotona decrescente per $x < 1$ si hanno due eventualità: 1. $\lim_{x \to -\infty} y_\varepsilon(x) = \infty$; 2. $\lim_{x \to -\infty} y_\varepsilon(x) = \ell \geq y_\varepsilon(-1)$.

La seconda eventualità è esclusa poiché in contraddizione con il teorema dell'asintoto, in quanto si avrebbe $\lim_{x \to -\infty} y'_\varepsilon(x) = -\infty$.

La soluzione y_ε è sempre positiva e monotona decrescente per $x > 1$ quindi esiste $\lim_{x \to \infty} y_\varepsilon(x) = \ell$, con $0 \leq \ell \leq y_\varepsilon(1)$. Dal teorema dell'asintoto segue che deve essere $\ell = 0$.

Esercizio 4. (a) Il polinomio caratteristico all'equazione omogenea associata è

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + (1-\alpha)\lambda(\lambda-1) + \alpha\lambda - \alpha = \lambda^3 + (-2-\alpha)\lambda^2 + (1+2\alpha)\lambda - \alpha \\ &= \lambda(\lambda-1)^2 - \alpha(\lambda-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda-\alpha). \end{aligned}$$

Dunque $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \alpha$ sono zeri di P, e $m_1 = 3$ se $\alpha = 1$, mentre $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$ se $\alpha \neq 1$. L'integrale generale dell'omogenea è dato, al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, da

$$z(x) = \begin{cases} c_1 x + c_2 x \log x + c_3 x (\log x)^2, & \alpha = 1, \\ c_1 x + c_2 x \log x + c_3 x^\alpha, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

(b) Per $\alpha = 1$ l'integrale non converge per nessun valore di c_1, c_2 e c_3, non banale, in quanto, per ogni intero positivo k, la funzione $\dfrac{(\log x)^k}{x} > \dfrac{1}{x}$ per $x > 1$, e $1/x$ non è integrabile tra 1 e ∞.

Per $\alpha \neq 1$ per quanto visto sopra deve essere necessariamente $c_1 = c_2 = 0$. Mentre la funzione $x^{\alpha-2}$ è integrabile tra 1 e ∞ solo se $\alpha - 2 < -1$ cioè per $\alpha < 1$.

In conclusione le soluzioni cercate sono del tipo $z(x) = c_3 x^\alpha$, $c_3 \in \mathbb{R}$, per $\alpha < 1$ e $z(x) = 0$ per $\alpha \geq 1$.

(c) Sostituendo la funzione $y(x) = \log x$ nell'equazione si ottiene $1 + 2\alpha - \alpha \log x = -1 + \log x$ che è verificata solo per $\alpha = -1$.

A.A. 2008/2009 – II Esercitazione – 8 Giugno 2009

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -\dfrac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ si chiede di:

(a) riconoscere che esso ammette un'unica soluzione in piccolo;

(b) determinare, mediante la ricerca di un fattore integrante della forma differenziale associata, la soluzione del problema di Cauchy in forma implicita.

Esercizio 2. Dato il sistema lineare $Y' = \mathbb{A}Y$, dove $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2+a & -a \\ a & 2-a \end{bmatrix}$, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si chiede di

(a) determinare la forma canonica di Jordan di $\mathbb{A}$;

(b) calcolare $e^{\mathbb{A}x}$;

(c) trovare un sistema fondamentale di soluzioni.

Esercizio 3. Posto $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\alpha > -1$, si chiede di:

(a) mostrare che l'integrale è convergente;

(b) calcolare $I(\alpha)$, utilizzando le funzioni speciali;

(c) giustificare che I è continua in $(-1, \infty)$, e calcolare $\displaystyle\lim_{\alpha \to -1^+} I(\alpha)$ e $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

Esercizio 4. Dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione f in $L^2_{2\pi}$ ed in quali casi $f \in C_{2\pi}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{n}{n^3+1}\right)[\sin(nx) + \cos(nx)], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \sqrt[n]{n!}\right)\cos(nx), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin(nx).$$

Esercizio 5. Data la funzione 2π–periodica f definita in $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/4) \\ \dfrac{\pi - x}{3}, & x \in [\pi/4, \pi] \end{cases}, \qquad f(-x) = -f(x), \qquad f(x+2\pi) = f(x),$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, si chiede di:

(a) disegnare un grafico qualitativo di f e determinare il tipo di convergenza della serie di Fourier di f;

(b) scrivere la serie di Fourier di f;

(c) utlizzando (b) e il valore $f(\pi/4)$, dedurre la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-2}$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Chiaramente $f(x,y) = -y(1+x^2)/x(1+y^2)$ è di classe $C^\infty(A)$, nel semipiano aperto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$, che interessa a noi. Pertanto la soluzione massimale del problema di Cauchy esiste ed è unica.

(b) Posto $\omega(x,y) = y(1+x^2)dx + x(1+y^2)dy$, abbiamo che $a_y(x,y) - b_x(x,y) = x^2 - y^2$ non è esatta in $\mathbb{R}^2$, non essendo chiusa. Cerchiamo un fattore integrante $\varphi(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$ e pongo $\alpha_1 = \alpha'/\alpha$ e $\beta_1 = \beta'/\beta$. Quindi, dovendo essere $a_y(x,y) - b_x(x,y) = \alpha_1(x)b(x,y) - \beta_1(y)a(x,y)$, abbiamo $x^2 - y^2 = \alpha_1(x)x + \alpha_1(x)xy^2 - \beta_1(y)y - \beta_1(y)yx^2$, da cui $\alpha_1(x) = x$, cioè $\alpha(x) = 1/x$, e $\beta_1(y) = y$, cioè $\beta(y) = 1/y$. Pertanto $\varphi(x,y) = 1/xy$ e una f.d.l. localmente esatta, equivalente a ω, è $\tilde{\omega}(x,y) = (x + 1/x)dx + (y + 1/y)dy$. La famiglia di primitive è banalmente data da $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \log xy + c$, nella compenente connessa $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\ y > 0\,\}$ che interessa al caso nostro. Dunque la soluzionde del problema di Cauchy in forma implicita è $\frac{1}{2}(x^2+y^2) + \log xy = 1$.

Esercizio 2. (a) Gli autovalori di $\mathbb{A}$ sono le radici del polinomio $(2+a-\lambda)(2-a-\lambda) + a^2 = (\lambda-2)^2$, dunque l'unico autovalore è 2 che ha molteplicità algebrica 2. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Gli autovettori sono dati dalle soluzioni del sistema $(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})x = 0$, distinguiamo due casi: per $a = 0$ si hanno due autovettori indipendenti, per esempio $u_1 = (1,0)$ e $u_2 = (0,1)$ e la forma canonica di Jordan di $\mathbb{A}$ è diagonale; per $a \neq 0$ c'è un solo autovettore indipendente, per esempio $v_1 = (1,1)$, la forma canonica di $\mathbb{A}$ consta di un blocco di Jordan 2×2, troviamo il secondo vettore della catena risolvendo il sistema $(\mathbb{A} - 2\mathbb{I})V_1 = v_1$, che fornisce $V_1 = (1/(2a), -1/(2a))$. In conclusione: per $a \neq 0$, posto $\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1/(2a) \\ 1 & -1/(2a) \end{bmatrix}$, si ha $\mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Per $a = 0$ la matrice è diagonale quindi $e^{\mathbb{A}x} = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix}$, per $a \neq 0$ si ha

$$e^{\mathbb{A}x} = \mathbb{M}e^{\mathbb{J}x}\mathbb{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/(2a) \\ 1 & -1/(2a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ a & -a \end{bmatrix} = e^{2x} \begin{bmatrix} 1+ax & -ax \\ ax & 1-ax \end{bmatrix}.$$

(c) Per $a = 0$ un sistema fondamentale di soluzioni è dato da $u_1 e^{2x}$ e $u_2 e^{2x}$, per $a \neq 0$ si può scegliere $v_1 e^{2x}$ e $(V_1 + v_1 x)e^{2x}$.

Esercizio 3. (a) La funzione integranda è continua nell'intervallo $(0,1)$, nel punto 1 presenta una singolarità e nel punto 0 presenta una singolarità per $\alpha < 0$. Studiamo l'integrale nell'intorno delle singolarità. È abbastanza immediato verificare che l'integrale $\displaystyle\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}dx$ è convergente in quanto la funzione integranda ha nell'intorno di 1 il comportamento asintotico di $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ il cui integrale è convergente. Per $\alpha < 0$ l'integrale $\displaystyle\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}dx$ è convergente se e solo se $\alpha > -1$ poich la funzione integranda ha il comportamento asintotico di x^α. In conclusione l'integrale converge per ogni $\alpha > -1$.

(b) La sostituzione $x^2 = t$, il cui Jacobiano è sempre positivo nell'intervallo $(0,1)$, fornisce

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha/2}}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1+(\alpha+1)/2}(1-t)^{-1+1/2}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(c) Dunque $I(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)}$ e I è continua in $(-1,\infty)$ in quanto lo sono le funzioni a numeratore e denominatore e quella a denominatore è positiva in $(-1,\infty)$. Inoltre, $\lim_{\alpha\to -1^+} I(\alpha) = \infty$, quanto Γ continua in $\mathbb{R}^+$, con $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(x) \to \infty$ per $x \to 0^+$. Analogamente, $\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = I(0) = \pi/2$, essendo I continua in $(-1,\infty)$.

Esercizio 4. Chiaramente $0 < a_n = \arctan\left(\dfrac{n}{n^3+1}\right) \searrow 0$ e è immediato verificare che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 1$, cioè a_n ha lo stesso comportamento asintotico della successione $\dfrac{1}{n^2}$. Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora la serie trigonometrica converge totalmente (e quindi uniformemente) a qualche $f \in C_{2\pi}$.

Di nuovo $a_n = n - \sqrt[n]{n!}$, si osserva che $a_n = \sqrt[n]{n!}\left(\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} - 1\right)$ e poichè $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} = e$ (in quanto dal teorema di Cesaro essendo $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$) si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, in quanto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Quindi la serie trigonometrica non converge puntualmente ad alcuna funzione f.

Poichè $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \Gamma\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \Gamma(1) = 1$ (segue dalla formula $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e dalla continuità di Γ in 1), $\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ha lo stesso comportamento asintotico di n. Dunque $a_n = \dfrac{1}{n^2}\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ha lo stesso comportamento asintotico di $\dfrac{1}{n}$. Pertanto dal teorema di Abel–Dirichlet, $f \in L^2_{2\pi}$, essendo $a_n \in \ell^2$, ma $f \notin C_{2\pi}$.

Esercizio 5. (a) Ovviamente $f \in C_{2\pi} \cap AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ e ammette $f' \in L^2_{2\pi}$. Dunque la serie di Fourier di f converge totalmente a f in $\mathbb{R}$.

(b) Poichè f è dispari abbiamo che $a_n = 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots$, e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi/4} x \sin nx dx + \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi} (\pi - x)\sin nx dx\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/4}\cos nx dx + \frac{x-\pi}{3n}\cos nx\Big|_{\pi/4}^{\pi} - \frac{1}{3n}\int_{\pi/4}^{\pi}\cos nx dx\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{4n}\cos\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4n}\cos\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{3n^2}\sin\frac{n\pi}{4}\right\} = \frac{8}{3}\pi \cdot \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{4}. \end{aligned}$$

Pertanto $f(x) = \dfrac{8}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{4}\sin nx$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(c) In particolare $f(\pi/4) = \pi/4 = \dfrac{8}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$. Dunque

$$\begin{aligned}\frac{3}{32}\pi^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}[1-(-1)^k]\frac{1}{4k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\\ &= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2},\end{aligned}$$

in quanto $\sin^2(n\pi/4) = [1-\cos(n\pi/2)]/2 = \dfrac{1}{2}\begin{cases}1, & n = 2k-1\\ 1-(-1)^k, & n = 2k\end{cases}$. In conclusione $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

* *
* *

A.A. 2008/2009 – Sessione Estiva – 15 Giugno 2009

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^x(y-1)^2, \\ y(0) = 1+\alpha, \quad \alpha > 0, \end{cases}$ si chiede di

(a) dimostrare che esso ha un'unica soluzione massimale y_α e che $y_\alpha(x) > 1$ per ogni $x \in I_{\max}$;

(b) determinare l'espressione analitica della soluzione massimale y_α e $I_{\max}$;

(c) disegnare un grafico qualitativo di y_α in $I_{\max}$ e i limiti agli estremi di $I_{\max}$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 - \dfrac{x^2}{1+x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che esso ha un'unica soluzione massimale y;

(b) verficare che la soluzione y è monotona decrescente attraverso il teorema della monotonia;

(c) provare che y è globale e dispari in $\mathbb{R}$;

(d) tracciare un grafico qualitativo della soluzione y.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa assegnata. Si chiede di dimostrare che:

(a) $2f(x) \le f(2x) + f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(b) f ammette limite per $x \to \infty$;

(c) se inoltre $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$, allora f è strettamente crescente in $\mathbb{R}_0^+$.

Esercizio 4. Al variare del parametro $\alpha > 0$, dire quali tra le seguenti serie trigonometriche è la serie di Fourier di una funzione f in $L^2_{2\pi}$ ed in quali casi $f \in C_{2\pi}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan(n^{-\alpha}) \sin(nx), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right) \sin(nx), \quad \sum_{n=2}^{\infty} [\zeta(n) - 1]^{1+\alpha} \cos(nx).$$

Esercizio 5. Data $f(x) = g(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, con $g \in C(\mathbb{R}_0^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$, $g'(r) = o(1)$ per $r \to 0^+$, si chiede di:

(a) dimostrare che $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $x = 0$ è un punto critico per f;

(b) verificare che $\displaystyle\int_{\partial B_n} \partial_\nu f(x) dS = \omega_n g'(1)$, ove B_n è la palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^n$;

(c) dimostarre che $\displaystyle\int_{B_n} \langle \nabla f(x), x\rangle dx = \omega_n g(1) - n \int_{B_n} f(x) dx.$

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Poiché $f(x,y) = e^x(y-1)^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ allora il problema ammette un'unica soluzione massimale y_α, per ogni $\alpha > 0$. Si osserva che $y \equiv 1$ soluzione costante dell'equazione, per l'unicità locale si ha che $y_\alpha(x) > 1$ per ogni $x \in I_{\max}$, poich $y_\alpha(0) > 1$. Si osservi che il teorema di regolarità ci garantisce che $y_\alpha \in C^\infty(I_{\max})$.

(b) Per quanto detto sopra per ogni $x \in I_{\max}$, si ha che $y_\alpha(x) > 1$ e vale

$$\int_{1+\alpha}^{y_\alpha} \frac{ds}{(s-1)^2} = \int_0^x e^s ds, \qquad \frac{-1}{y_\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} = e^x - 1, \qquad y_\alpha = \frac{1 + 2\alpha - \alpha e^x}{2 + 2\alpha - \alpha e^x},$$

L'intervallo di definizione di y_α è $I_{\max} = (-\infty, b_\alpha)$ con $b_\alpha = \log\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha}\right)$.

(c) La funzione y_α sempre monotona crescente e convessa, inoltre $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}$ e $\displaystyle\lim_{x\to b_\alpha^-} y_\alpha(x) = \infty$.

Esercizio 2. (a) Poiché $f(x,y) = y^2 - x^2/(1+x^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, certamente il problema di Caychy assegnato ammette un'unica soluzione massimale y in $I_{\max}$.

(b) Ora $f(x,y) = 0$ e $\partial_x f(x,y) = -2x/(1+x^2) < 0$ in $\mathbb{R}^+$. Quindi $y' < 0$ in $\mathbb{R}^+$, cioè y è strettamente decrescente in $[0, T_{\max})$. Analogamente in tutto $I_{\max}$. Dunque $y^2(x) - x^2/(1+x^2) = f(x, y(x)) \le 0$, cioè $|y(x)| \le |x|/\sqrt{1+x^2}$ in $I_{\max}$. In conclusione $|f(x,y(x))| \le 2x^2/(1+x^2) \le 2$, pertanto $I_{\max} = \mathbb{R}$ e y è globale.

Posto $z(x) = -y(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Risulta $z'(x) = y'(-x) = y^2(-x) - x^2/(1+x^2) = z^2(x) - x^2/(1+x^2)$. Dal teorema di unicità della soluzione segue che $z = y$, cioè y è dispari.

Esercizio 3. (a) È un'immediata conseguenza della definizione di convessità prendendo $x_1 = 2x$, $x_2 = 0$ e $t = 1/2$. Dunque $f(\frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}0) \leq \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(0)$, da cui $2f(x) \leq f(2x) + f(0)$.

(b) Se per assurdo ciò non fosse vero, allora $\liminf_{x\to\infty} f(x) < \limsup_{x\to\infty} f(x)$. Dunque potremmo trovare 3 punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2 > f(x_3)$. Allora, essendo $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$ per un opportuno $t \in (0,1)$, cioè $t = (x_3 - x_2)/(x_2 - x_1)$. Dalla convessità di f avremmo $f(x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_3) < tf(x_2) + (1-t)f(x_2) = f(x_2)$, che è un ovvio assurdo. Pertanto f ammette limite per $x \to \infty$.

(c) Siano x, $y \in \mathbb{R}^+$, con $0 < x < y$. Allora, come per il passo (b), abbiamo $x = t \cdot 0 + (1-t)y$, $t = (y-x)/y \in (0,1)$. Dalla convessità di f abbiamo $f(x) \leq tf(0)+(1-t)f(y) = (1-t)f(y) < f(y)$, cioè f è strettamente crescente in $\mathbb{R}_0^+$.

Esercizio 4. Posto $a_n = \tan(n^{-\alpha})$, abbiamo $\lim_{n\to\infty} a_n n^\alpha = 1$ e la serie data si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$. Quindi la serie assegnata converge puntualmente a una funzione periodica $f \in \mathscr{M}_{2\pi}$ per ogni $\alpha > 0$, inoltre converge totalmente e uniformemente se e solo se $\alpha > 1$, in questo caso il limite è una funzione $f \in C_{2\pi}$; per $1/2 < \alpha \leq 1$ la serie converge a una funzione $f \in L^2_{2\pi}$.

Sia $a_n = \frac{\pi}{2} - \arctan n$. Poichè $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$ (si può osservare riscrivendo il limite come $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ e usando il teorema di De l'Hôpital). La successione a_n ha dunque lo stesso comportamento asintotico di $1/n$. Dunque la serie assegnata è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^2_{2\pi}$, in quanto $a_n \in \ell^2$, ma $f \notin C_{2\pi}$.

È noto che $1 < \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$ da cui segue che $[\zeta(n) - 1]^{1+\alpha} \leq \frac{1}{(n-1)^{1+\alpha}}$. Poiché $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{1+\alpha}}$ è convergente, anche $\sum_{n=2}^{\infty} [\zeta(n) - 1]^{1+\alpha}$ è convergente e quindi la serie assegnata converge totalmente e quindi uniformemente a una funzione $f \in C_{2\pi}$.

Esercizio 5. (a) Chiaramente $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Inoltre, $\nabla f(x) = g'(r)x/\|x\|$ per $x \neq 0$. Dunque $\|\nabla f(x)\| \leq |g'(\|x\|)| \to 0$ per $x \to 0$, in quanto $g'(r) = o(1)$ per $r \to 0^=$. Dunque $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\nabla f(0) = 0$, cioè $x = 0$ è un punto critico per f.

(b) $\displaystyle\int_{\partial B_n} \partial_\nu f(x) dS = \int_{\partial B_n} \langle \nabla f(x), x/\|x\| \rangle dS = \int_{\partial B_n} g'(r) \langle x/\|x\|, x/\|x\| \rangle dS$
$\displaystyle = g'(1) \int_{\partial B_n} dS = \omega_n g'(1).$

(c) Dal Teorema della divergenza $\displaystyle\int_{B_n} \langle \nabla f(x), x \rangle dx = \int_{B_n} g'(r)\|x\| dx = \omega_n \int_0^1 r^{n-1+1} g'(r) dr$
$\displaystyle = \omega_n \left[r^n g(r)\Big|_0^1 - n \int_0^1 r^{n-1} g(r) dr \right] = \omega_n g(1) - n \int_{B_n} f(x) dx.$

A.A. 2008/2009 – Sessione Estiva – 3 Luglio 2009

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 y}{1+x^2+y^2} \\ y(0) = \varepsilon > 0 \end{cases}$ si chiede di

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione globale y;

(b) verificare che y è positiva, e calcolare i limiti $\lim_{x \to \mp\infty} y(x)$;

(c) disegnare un grafico qualitativo della soluzione y.

Esercizio 2. Dato $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{1-x^4} \right)^{\alpha} dx$, $\alpha \in J = (-1/2, 1)$, si chiede di

(a) calcolare $I(\alpha)$, utilizzando le funzioni Beta e Gamma;

(b) calcolare $\lim_{\alpha \to (-1/2)^+} I(\alpha)$ e $\lim_{\alpha \to 1^-} I(\alpha)$;

(c) giustificare in dettaglio perchè I è di classe $C^\infty(J)$.

Esercizio 3. Data la funzione 2–periodica definita da $f(x) = (1 - |x|)^2$, $x \in [-1, 1)$, si chiede di:

(a) giustificare in dettaglio perchè la serie di Fourier di f converge totalmente a f in $\mathbb{R}$;

(b) scrivere la serie di Fourier di f;

(c) calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, utilizzando il valore $f(1/2)$.

Esercizio 4. Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, si chiede di:

(a) calcolare $\mathbb{A}^2$ e dimostrare che $\mathbb{A}$ non è diagonalizzabile;

(b) determinare $e^{\mathbb{A}x}$, utilizzando (a);

(c) scrivere l'integrale generale del sistema $Y' = \mathbb{A}Y + B(x)$, ove $B(x) = [2x, 2x]^t$.

Esercizio 5. Sia $f_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ definita da $f_p(x_1, x_2) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$, $p > 0$, si chiede di:

(a) disegnare l'insieme $B_{1/2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, f_{1/2}(x_1, x_2) \leq 1\}$ e mostrare che non è convesso;

(b) mostrare che la funzione $f_p(x_1, x_2)$ per $0 < p < 1$ non è convessa;

(c) mostrare che la funzione $f_p(x_1, x_2)$ per $p \geq 1$ è convessa;

(d) calcolare $f_\infty(x_1, x_2) = \lim_{p \to \infty} f_p(x_1, x_2)$ e mostrare che è una funzione convessa.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Qui $f(x,y) = x^2y/(1+x^2+y^2)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione massimale per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Inoltre $|f(x,y)| \le \dfrac{x^2}{1+x^2} \cdot |y| \le |y|$ in $\mathbb{R}^2$. Quindi la soluzione massimale del nostro problema è globale.

(b) Poiché l'equazione ammette la soluzione banale $\varphi \equiv 0$, ne consegue che la nostra soluzione y rimane positiva in tutto $\mathbb{R}$. Quindi $y' > 0$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pertanto la soluzione y è strettamente monotona crescente. In particolare ammette i limiti richiesti. Ora $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$, altrimenti sarebbe un numero $0 < \ell_1 \le \varepsilon$ e quindi dall'equazione risulterebbe che $y'(x) \to \ell_1 > 0$ per $x \to -\infty$, e questo contraddirebbe il teorema dell'asintoto.

Analogamente, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$, altrimenti sarebbe un numero $\ell_2 > 0$ e quindi dall'equazione risulterebbe che $y'(x) \to \ell_2 > 0$ per $x \to \infty$, e questo di nuovo contraddirebbe il teorema dell'asintoto.

Esercizio 2. (a) Poiché l'integranda è non–negativa e pari in $(-1,1)$, basta calcolare direttamente $I(\alpha)$ su $(0,1)$ e studiarne la convergenza per $\alpha \in J$. Posto $x^4 = t$, da cui $dx = t^{-1+1/4}dt/4$, abbiamo

$$I(\alpha) = \frac{2}{4}\int_0^1 t^{-1+(2\alpha+1)/4}(1-t)^{1-\alpha-1}dt = \frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{2\alpha+1}{4}, 1-\alpha\right) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{2\alpha+1}{4}\right)\Gamma\left(1-\alpha\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{5-2\alpha}{4}\right)}.$$

(b) Da (a) abbiamo immediatamente che $\lim\limits_{\alpha\to(-1/2)^+} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to1^-} I(\alpha) = \infty$, in quanto in entrambi i casi il denominatore tende a $\Gamma(6/4) = \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2 > 0$ e a $\Gamma(3/4) > 0$, mentre il numeratore tende a ∞, in quanto $\Gamma(x) \to \infty$ per $x \to 0^+$.

(c) Si osserva che $3/4 < (5-2\alpha)/4 < 6/4 = 3/2$ per ogni $\alpha \in J$. Dunque il denominatore di I è sempre positivo. Poichè la funzione Γ è composta con funzioni affini, e il denominatore non si annulla mai, chiaramente I ha la regolarità di Γ in J. Dunque $I \in C^\infty(J)$.

Esercizio 3. (a) Chiaramente f è pari in $[-1,1)$, con $f(-1) = f(1) = 0$, $f \in C_2 \cap AC_{\rm loc}(\mathbb{R})$, $f'(x) = -2(1-x)$ per $x \in (0,1]$ e $f'(x) = 2(1+x)$ per $x \in [-1,0)$. Quindi f' esiste in $\mathbb{R} \setminus 2\mathbb{Z}$ ed è ivi limitata. Pertanto $f' \in L_2^2$ e dal teorema di convergenza totale segue che la serie di Fourier di f, di soli coseni, converge totalmente a f in $\mathbb{R}$.

(b) Da quanto detto in (a), risulta $b_n = 0$ per $n = 1, 2\ldots$, e $a_0 = 2\int_0^1 (1-x)^2dx = -2(1-x)^3/3|_0^1 = 2/3$, mentre per $n = 1, 2\ldots$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 (1-x)^2\cos n\pi x dx = 2\left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi}(1-x)^2\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-x)\sin n\pi x dx\right] \\ &= \frac{4}{n\pi}\left[-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}(1-x)\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x dx\right] = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Pertanto $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\cos n\pi x.$

(c) Ora, poiché $\cos(n\pi/2) = 0$ se $n = 2k-1$, $\cos(n\pi/2) = (-1)^k$ se $n = 2k$ e $f(1/2) = 1/4$, da (b) risulta

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{4k^2}\cdot(-1)^k = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}, \quad \text{da cui} \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Esercizio 4. (a) Si verifica subito che $\mathbb{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$. Se $\mathbb{A}$ fosse diagonalizzabile, allora esisterebbe $\mathbb{M}$ invertibile tale che $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{M} = \mathbb{D}$, da cui $\mathbb{D}^2 = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}^2\mathbb{M} = \mathbb{O}$. Dunque $\mathbb{D} = \mathbb{O}$ e quindi $\mathbb{A} = \mathbb{O}$, che è una contraddizione.

(b) Da (a) abbiamo che $\mathbb{A}^k = \mathbb{O}$ per $k \geq 2$ e

$$e^{\mathbb{A}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}x)^k}{k!} = \mathbb{I} + \mathbb{A}x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & -x \\ x & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x & -x \\ x & 1-x \end{bmatrix}.$$

(c) Sia $Y = [y_1, y_2]^T$, allora vale $y_1' = y_1 - y_2 + 2x = y_2'$ e quindi $y_1 = y_2 + c_1$ e $y_2' = c_1 + 2x$ da cui $y_2(x) = x^2 + c_1 x + c_2$ e $y_1(x) = y_2(x) + c_1$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. (a) Sfruttando la simmetria della funzione basta studiare il caso $x, y \geq 0$, e risolvere la disequazione $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 1$ che è equivalente a $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1$. Esplicitando rispetto alla variabile y si ottiene $0 \leq y \leq (1 - \sqrt{x})^2$, con $0 \leq x \leq 1$ (si osservi che $\sqrt{x} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1$). L'insieme $B_{1/2}$ non è convesso in quanto $f_{1/2}(1,0) = f_{1/2}(0,1) = 1$ ma $f_{1/2}(1/2, 1/2) = 2$, quindi $(0,1), (1,0) \in B_{1/2}$ ma il loro punto medio non appartiene a $B_{1/2}$.

(b) Come in (a) si osserva che $f_p(1,0) = f_p(0,1) = 1$ ma $f_p(1/2,1/2) = 2^{(1-p)/p} > 1$ se e solo se $0 < p < 1$.

(c) La funzione f_p per $p \geq 1$ è una norma vettoriale e quindi è convessa.

(d) Si osserva che per ogni coppia di reali tali che $a \geq b \geq 0$, se $a \neq 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a\left(1 + \frac{b^n}{a^n}\right)^{1/n} = a,$$

mentre se $a = b = 0$ il limite è 0. Ne segue che $f_\infty(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, che è ancora una norma vettoriale. La convessità si può verificare anche direttamente usando il fatto che il massimo di funzioni convesse è una funzione convessa.

* *
* *

A.A. 2008/2009 – Sessione Estiva – 15 Luglio 2009

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = |\sin y| + x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione globale y;

(b) verificare che y è dispari in $\mathbb{R}$ e calcolare i limiti $\lim_{x\to\mp\infty} y(x)$;

(c) disegnare un grafico qualitativo della soluzione y.

Esercizio 2. Data la funzione 2–periodica definita da $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0] \\ x^{-1/2}, & x \in (0, 1) \end{cases}$, si chiede di:

(a) giustificare in dettaglio perché f ammette serie di Fourier;

(b) scrivere la serie di Fourier di f;

(c) calcolare la somma della serie di Fourier di f nei punti $\{2k-1 \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 3. Dato $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{n+1} \right) \cos n\pi x$, si chiede di:

(a) giustificare che essa è la serie di Fourier di una funzione periodica $g \in L^1_T$;

(b) determinare il periodo T;

(c) dire perchè $g \in L^p_T$ se $1 \le p < 2$, ma $g \notin L^p_T$ se $p \ge 2$.

Esercizio 4. Data l'equazione differenziale $x^2 y'' - xy' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$, si chiede di:

(a) determinare a in modo che $\varphi(x) = x \log x$ sia soluzione dell'equazione in $\mathbb{R}^+$;

(b) classificare l'equazione differenziale ottenuta;

(c) determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale in $\mathbb{R}^+$;

(d) determinare le soluzioni dell'equazione che sono funzioni strettamente convesse in $\mathbb{R}^+$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e derivabile in $\mathbb{R}$. Si chiede di:

(a) dimostrare che f' è continua in $\mathbb{R}$;

(b) dimostrare che $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, se $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ esiste finito;

(c) fornire l'esempio di una funzione g strettamente convessa in $\mathbb{R}$ e di classe $C^1(\mathbb{R})$, con $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$;

(d) dimostrare che x^x è strettamente convessa in $\mathbb{R}^+$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Posto $f(x, y) = |\sin y| + x^2$, osserviamo che f è continua in $\mathbb{R}^2$, e per ogni $y \neq \pi\mathbb{Z}$ risulta $\partial_y f(x, y) = (\cos y) \cdot \operatorname{sign}(\sin y)$. Quindi tale funzione dipende solo da y e i punti $\pi\mathbb{Z}$ sono angolosi. Infine $|\partial_y f(x, y)| \le 1$ in $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Pertanto f è Lipschitziana in y uniformemente in $x \in \mathbb{R}$. La soluzione del problema di Cauchy esiste dunque unica e globale, essendo f definita in un dominio striscia.

(b) Posto $z(x) = -y(-x)$, abbiamo $z'(x) = y'(-x) = |\sin y(-x)| + (-x)^2 = |\sin z(x)| + x^2$ e $z(0) = -y(0) = 0$. Dunque dal teorema di unicità globale segue che $z \equiv y$ in $\mathbb{R}$, cioè y è dispari in $\mathbb{R}$.

Poichè $y' \ge x^2$, abbiamo che $y' > 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $y'(0) = 0$. Quindi y è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e dunque ammette limiti per $x \to -\infty$ e $x \to \infty$. Se $\lim_{x\to\infty} y(x) = L \in \mathbb{R}^+$, allora

$\lim_{x\to\infty} y'(x) = \infty$, contraddicendo il teorema dell'asintoto. Pertanto $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$. Poichè y è dispari abbiamo immediatamente che $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$.

(c) Ovvio.

Esercizio 2. (a) $f \in L_2^1 \setminus L_2^2$ e f è di classe C^1 in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pertanto la serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ in tutti i punti $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, mentre converge a $1/2$ nei punti $\{2k-1 : k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $a_0 = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2x^{1/2}\big|_0^1 = 2$, $a_n = \int_0^1 x^{-1/2} \cos n\pi x dx = 2\alpha_n/\sqrt{\pi n}$, ove $\alpha_n = \int_0^{\sqrt{\pi n}} \cos t^2 dt$. Analogamente $b_n = \int_0^1 x^{-1/2} \sin n\pi x dx = 2\beta_n/\sqrt{\pi n}$, ove $\beta_n = \int_0^{\sqrt{\pi n}} \sin t^2 dt$. In conclusione

$$f(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \cos n\pi x + \frac{\beta_n}{\sqrt{n}} \sin n\pi x \right\}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

(c) Come già detto in (a), nei punti $x \in \{2k-1 : k \in \mathbb{Z}\}$ la serie di Fourier di f converge a $1/2$. Dunque

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}, \quad \text{cioè} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Esercizio 3. (a) Innanzitutto $\alpha_n \to 0$ per $n \to \infty$. Quindi

$$\alpha_n \sim \sin \alpha_n = \cos\left(\arcsin \frac{n}{n+1}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Dunque α_n è asintotica a una successione infinitesima e convessa e, poiché $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \log n = 0$, la serie trigonometrica assegnata è la serie di Fourier di una funzione $g \in L_T^1$.

(b) Essendo $\omega = \pi$, abbiamo $T = 2\pi/\omega = 2$.

(c) Basta osservare che se $1 < p < \infty$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \alpha_n^p < \infty$ se e solo se $p - 2 - p/2 < -1$, cioè $p < 2$.

Esercizio 4. (a) Sostituendo $\varphi'(x) = \log x + 1$, $\varphi''(x) = 1/x$ nell'equazione differenziale, otteniamo $x - x\log x - x + ax \log x = 0$, da cui $a = 1$.

(b) L'equazione differenziale ottenuta è una di Eulero di ordine 2 (dunque non autonoma).

(c) L'equazione caratteristica è $0 = \lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$. Pertanto, essendo $\lambda = 1$ una radice di molteplicità $m = 2$, l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \log x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Per la regolarità delle y basta studiare il segno della derivata seconda. Dunque dai punti (a) e (c) abbiamo $y'(x) = c_1 + c_2(\log x + 1)$, da cui $y''(x) = c_2/x > 0$ in $\mathbb{R}^+$ se $c_2 > 0$. Pertanto le funzioni richieste sono tutte e sole quelle della forma $y(x) = c_1 x + c_2 x \log x$, $c_1 \in \mathbb{R}$ e $c_2 > 0$.

Esercizio 5. (a) La funzione f' è non decrescente in $\mathbb{R}$ e dunque, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esistono finiti $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, e dal teorema dell'Hôpital essi sono uguali a $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$, rispettivamente. Poiché f è derivabile in x_0, segue che $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$, cioè f' è continua in x_0. Dall'arbitrarietà di $x_0 \in \mathbb{R}$ abbiamo che f' è continua in $\mathbb{R}$.

(b) È un'immediata conseguenza del Teorema dell'Asintoto e del fatto che f', essendo non decrescente in $\mathbb{R}$, ammette limite ℓ, finito oppure ∞, per $x \to \infty$. Infatti, dal teorema di Lagrange esiste $\xi_x \in (x, x+1)$ tale che $f'(\xi_x) = f(x+1) - f(x)$. Quindi $f'(\xi_x) \to 0$ per $x \to \infty$, in quanto $\lim_{x\to\infty} f(x)$ esiste finito per ipotesi. Pertanto $\ell = 0$.

(c) Basta prendere $g(x) = e^{-x}$ che è addirittura di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

(d) Ovviamente $x^x = e^{x \log x}$, con $t \mapsto e^t$ strettamente convessa e strettamente monotona crescente in $\mathbb{R}$ e $x \mapsto x \log x$ strettamente convessa in $\mathbb{R}^+$. Dunque x^x è strettamente convessa in $\mathbb{R}^+$.

* *
* *

A.A. 2008/2009 – Sessione Estiva – 3 Settembre 2009

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy^2 e^{-|y|} \\ y(0) = \varepsilon > 0 \end{cases}$, si chiede di:

(a) dimostrare che il problema ammette un'unica soluzione globale y_ε;

(b) verificare che y_ε è pari e calcolare $\displaystyle\lim_{x \to \mp\infty} y_\varepsilon(x)$;

(c) studiare l'esistenza di punti di minimo di y_ε;

(d) tracciare il grafico qualitativo di y_ε.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} Y' = \mathbb{A}Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$, dove $\mathbb{A}$ è una matrice $n \times n$ idempotente, cioè $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$, si chiede di:

(a) calcolare $e^{x\mathbb{A}}$, utilizzando la definizione di matrice esponenziale, e scrivere l'integrale generale del sistema;

(b) dire per quali $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste in $\mathbb{R}^n$ il $\lim_{x \to \infty} Y(x)$;

(c) dire per quali $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, la soluzione del problema di Cauchy è tale che $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} Y(x) = 0$.

Esercizio 3. Data la serie trigonometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{2 + n^a}{1 + n^a} \sin 2n\pi x$, $a > 0$, si chiede di:

(a) giustificare che essa è la serie di Fourier di una funzione periodica $f \in L^1_T$;

(b) determinare il periodo T;

(c) dire per quali valori di $a > 0$ risulta $f \in L^p_T$, con $p > 1$;

(d) determinare i valori $a > 0$ per i quali la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Dato il seguente integrale:

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\alpha (\log \log x)^\beta}{x (\log x)^{\alpha + 1}} dx, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

si chiede di calcolare:

(a) $I(\alpha, \beta)$ usando le funzioni speciali;

(b) $\lim_{n\to\infty} I(n, n)$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{I(n, n)}$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{I(n, n)}$.

Esercizio 5. Siano C un insieme convesso di uno spazio normato $X = (X, \|\cdot\|)$, $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $x_0 \in C$ un punto di minimo locale per f in C. Si chiede di dimostrare che:

(a) x_0 è un minimo globale per f in C;

(b) l'insieme dei minimi globali di f è convesso;

(c) se inoltre f è strettamente convessa in un intorno di x_0, allora il punto di minimo è unico.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Posto $f(x, y) = xy^2e^{-|y|} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, chiaramente f è continua in $\mathbb{R}^2$. Inoltre, per $y \neq 0$, risulta $\partial_y f(x, y) = xe^{-|y|}(2y - y^2 \cdot y/|y|) = xye^{-|y|}(2 - |y|) \to 0 = \partial_y f(x, 0)$ per $(x, y) \to (x, 0)$, per il teorema de L'Hôpital. Dunque $\partial_y f \in C(\mathbb{R}^2)$. Ovviamente anche $\partial_x f(x, y) = y^2e^{-|y|} \in C(\mathbb{R}^2)$. Pertanto $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Inoltre $|f(x, y)| = |x| \cdot |y| \cdot |y|e^{-|y|}$ e la funzione nonnegativa $g(t) = te^{-t}$ in $\mathbb{R}_0^+$ ammette punto di massimo in $t = 1$, essendo $g'(t) = e^{-t}(1 - t)$, con valore massimo $1/e$. Pertanto $|f(x, y)| \leq \dfrac{1}{e}|x| \cdot |y|$. Quindi il problema ammette un'unica soluzione globale y_ε.

(b) Posto $z(x) = y_\varepsilon(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $z'(x) = -y_\varepsilon'(-x) = xy_\varepsilon^2(-x)e^{-|y_\varepsilon(-x)|} = xz^2(x)e^{-|z(x)|}$, con $z(0) = \varepsilon$. Pertanto dal teorema di unicità segue che y_ε è pari e che è positiva in $\mathbb{R}$, in quanto $\varphi(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione differenziale. Dunque $y_\varepsilon' > 0$ in $\mathbb{R}^+$, da cui esiste $\lim_{x\to\infty} y_\varepsilon(x) = \ell \in (\varepsilon, \infty]$. Se $\ell < \infty$, allora risulterebbe $\lim_{x\to\infty} y_\varepsilon'(x) = \infty$, contraddicendo il teorema dell'asintoto. Quindi $\ell = \infty$. Poichè y_ε è pari, anche $\lim_{x\to-\infty} y_\varepsilon(x) = \infty$.

(c) Per quanto detto al punto (b) risulta $y_\varepsilon' > 0$ in $\mathbb{R}^+$, $y_\varepsilon' < 0$ in $\mathbb{R}^-$ e $y_\varepsilon'(0) = 0$. Dunque $x = 0$ è l'unico punto di minimo relativo, ed anche assoluto, di y_ε in $\mathbb{R}$.

(d) ovvio.

Esercizio 2. (a) Siccome $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$, con una semplice induzione si prova che $\mathbb{A}^k = \mathbb{A}$ per ogni $k \geq 1$, dunque

$$e^{x\mathbb{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x\mathbb{A})^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{A}x^k}{k!} = I - \mathbb{A} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\mathbb{A} = I - \mathbb{A} + e^x\mathbb{A}.$$

L'integrale generale è $Y(x) = Y_0 + (e^x - 1)\mathbb{A}Y_0$, al variare di Y_0 in $\mathbb{R}^n$.

(b) Si osserva immediatamente che $\lim_{x\to\infty} Y(x)$ esiste se e solo se $\mathbb{A}Y_0 = 0$, cioè se Y_0 appartiene al nucleo dell'applicazione lineare $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(c) Si osserva immediatamente che $\lim_{x\to-\infty} Y(x) = 0$ se e solo se $\mathbb{A}Y_0 = Y_0$, cioè se e solo se Y_0 appartiene al rango di $\mathbb{A}$.

Esercizio 3. (a) Posto $a_n = (2+n^a)/(1+n^a) = 1 + 1/(1+n^a) > 1$, osserviamo che $a_n \searrow 1$ per $n \to \infty$. Quindi $\log a_n \sim a_n - 1 = 1/n^a$ per $n \to \infty$ e per il teorema di Riemann–Abel la serie data è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^1_T$ per ogni $a > 0$.

(b) Poiché $\omega = 2\pi = 2\pi/T$, risulta $T = 1$.

(c) Sempre per il teorema di Riemann–Abel e per quanto osservato al punto (a), $f \in L^p_T$, $p > 1$, se e solo se $\sum n^{p-2} n^{-ap} < \infty$, quindi se e solo se $a > (p-1)/p$.

(d) Analogamente al punto (c) la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ a $f \in C_1$ se e solo se $\lim n \cdot n^{-a} = 0$, cioè se e solo se $a > 1$.

Esercizio 4. (a) Tramite il cambio di variabili $t = \log\log x$, da cui $dt = \dfrac{dx}{x \log x}$ e $e^t = \log x$, seguito dal cambio di variabili $z = \alpha t$, si ottiene

$$I(\alpha,\beta) = \alpha \int_0^\infty \frac{t^\beta dt}{e^{\alpha t}} = \alpha^{-\beta} \int_0^\infty z^{(\beta+1)-1} e^{-z} dz = \alpha^{-\beta} \Gamma(\beta+1).$$

(b) Siccome $I(n,n) = \dfrac{n!}{n^n}$ risulta $\lim\limits_{n\to\infty} I(n,n) = 0$, in quanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I(n+1,n+1)}{I(n,n)} = \dfrac{1}{e} < 1$.

(c) Utilizzando il teorema di Cesaro e ciò che è stato dimostrato al punto (b), risulta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{I(n,n)} = 1/e$.

(d) Per il punto (c), esistono due costanti positive M_1, M_2 tali che $M_1 \le \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} \le M_2$, per ogni n, quindi

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_1} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{n!}{n^n}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_2} = 1,$$

da cui $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{I(n,n)} = 1$.

Esercizio 5. (a) Sia x_0 un punto di minimo locale per f in C e $B = B(x_0, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, tale che $f(x_0) \le f(y)$ per ogni $y \in B \cap C$. Inoltre per ogni $x \in C \setminus B$ esiste $t = \varepsilon/\|x - x_0\| \in (0,1]$ tale che $x_0 + t(x - x_0) = (1-t)x_0 + tx \in B \cap C$. Dunque $f(x_0) \le f((1-t)x_0 + tx) \le (1-t)f(x_0) + tf(x)$. Da cui, essendo $t > 0$ risulta $f(x_0) \le f(x)$, come desiderato.

(b) Dal punto (a) risulta $\inf_{x\in C} f(x) = f(x_0)$. L'insieme sottolivello $C_0 = \{x \in C : f(x) \le f(x_0)\}$ è l'insieme dei punti di minimo di f e pertanto è convesso, essendo f convessa.

(c) Ripetendo l'argomento del punto (a), dal fatto che ora $f(x_0) < f(y)$ per ogni $y \in B \cap C$, abbiamo $f(x_0) < (1-t)f(x_0) + tf(x)$ da cui $f(x_0) < f(x)$ per ogni $x \in C$. Pertanto $C_0 = \{x_0\}$.

* *
* *

A.A. 2008/2009 – Sessione Estiva – 21 Settembre 2009

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x \arctan|y| \\ y(0) = \varepsilon > 0 \end{cases}$, si chiede di:

(a) dimostrare che il problema ammette un'unica soluzione globale y_ε;

(b) verificare che y_ε è pari e calcolare $\lim\limits_{x\to\mp\infty} y_\varepsilon(x)$;

(c) studiare l'esistenza di punti di minimo di y_ε;

(d) tracciare il grafico qualitativo di y_ε.

Esercizio 2. Date due funzioni $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, con la proprietà che $(f', g') = (-g, f)$, $f^2 + g^2 = 1$ in $\mathbb{R}$, e $f(0) = g'(0) = 1$, si chiede di dimostrare che:

(a) $fg' - gf' = 1$ in $\mathbb{R}$;

(b) $f'(0) = g(0) = 0$;

(c) il problema, $(f', g') = (-g, f)$, $f^2 + g^2 = 1$ in $\mathbb{R}$ e $f(0) = g'(0) = 1$, è equivalente al problema di Cauchy $\begin{cases} f' = -g, & f(0) = 1,\ g(0) = 0 \\ g' = f, & f'(0) = 0,\ g'(0) = 1 \end{cases}$;

(d) determinare nel modo più veloce l'unica soluzione del problema di Cauchy di cui al punto (c).

Esercizio 3. Data la serie trigonometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^{-a}) \sin n\pi x$, $a > 0$, si chiede di:

(a) giustificare che essa è la serie di Fourier di una funzione periodica $f \in L^1_T$;

(b) determinare il periodo T;

(c) dire per quali valori di $a > 0$ risulta $f \in L^p_T$, con $p > 1$;

(d) determinare i valori $a > 0$ per i quali la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e posto $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{1-2\alpha} e^{-(1-\alpha)x} dx$, si chiede di:

(a) dire per quali valori di α l'integrale è convergente e per tali α calcolare $I(\alpha)$ usando le funzioni speciali;

(b) calcolare $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha)$;

(c) calcolare $\displaystyle\lim_{\alpha \to 1^-} I(\alpha)$.

Esercizio 5. Data $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sin^2(x/k^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, si chiede di dimostrare che:

(a) f_n è T_n- periodica e continua in $\mathbb{R}$, e determinare il periodo T_n;

(b) $(f_n)_n$ converge totalmente a una funzione continua f in $\mathbb{R}$, e scrivere f come somma di una serie di funzioni;

(c) $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, e f non è periodica.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Posto $f(x,y) = x \arctan |y| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, chiaramente f è continua in $\mathbb{R}^2$. Ovviamente $\partial_x f(x,y) = \arctan |y| \in C(\mathbb{R}^2)$. Inoltre, per $y \neq 0$, risulta $\partial_y f(x,y) = \dfrac{x}{1+y^2} \cdot \dfrac{y}{|y|}$ e dunque $|\partial_y f(x,y)| \to |x|$ per $(x,y) \to (x,0)$, cioè $f \in Lip^y(\mathbb{R}^2)$ uniformemente in x che varia in insiemi compatti di $\mathbb{R}$. Ricordando che $0 \le \arctan |y| \le |y|$, addirittura $|f(x,y)| \le |x| \cdot |y|$. Quindi il problema ammette un'unica soluzione globale y_ε.

(b) Posto $z(x) = y_\varepsilon(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $z'(x) = -y'_\varepsilon(-x) = x \arctan |y_\varepsilon(-x)| = x \arctan |z(x)|$, con $z(0) = \varepsilon$. Pertanto dal teorema di unicità segue che y_ε è pari e che è positiva in $\mathbb{R}$, in quanto $\varphi(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione differenziale. Dunque $y'_\varepsilon > 0$ in $\mathbb{R}^+$. Inoltre $y'(x) \ge (\arctan \varepsilon) x$ per ogni $x > 0$, che integrata su $[0,x]$ dà $y(x) \ge \varepsilon + (\arctan \varepsilon/2) x^2$. Quindi $\lim\limits_{x\to\infty} y_\varepsilon(x) = \infty$. Poichè y_ε è pari, anche $\lim\limits_{x\to-\infty} y_\varepsilon(x) = \infty$.

(c) Per quanto detto al punto (b) risulta $y'_\varepsilon > 0$ in $\mathbb{R}^+$, $y'_\varepsilon < 0$ in $\mathbb{R}^-$ e $y'_\varepsilon(0) = 0$. Dunque $x = 0$ è l'unico punto di minimo relativo, ed anche assoluto, di y_ε in $\mathbb{R}$.

(d) ovvio.

Esercizio 2. (a) Moltiplicando scalarmente $(f'(x), g'(x)) = (-g(x), f(x))$ per $(-g(x), f(x))$, otteniamo $-f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = g(x)^2 + f(x)^2 = 1$ per ipotesi. Dunque $fg' - f'g = 1$ in $\mathbb{R}$, come richiesto.

(b) Poiché $f(0) = g'(0) = 1$, da (a) risulta $f'(0)g(0) = 0$ e dal fatto che $f' = -g$ abbiamo dunque che $f'(0) = g(0) = 0$.

(c) Dai punti (a) e (b) discende in modo ovvio la scrittura in forma di sistema.

(d) Il sistema lineare è equivalente all'equazione $f'' = -g' = -f$ e l'integrale generale dell'equazione $f'' + f = 0$ è dato da $f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Applicando le condizioni iniziali abbiamo $1 = f(0) = c_2$, e $0 = f'(0) = c_1$, cioè $f(x) = \cos x$ e dunque $g(x) = \sin x$.

Esercizio 3. (a) Ovviamente $\sin(n^{-a}) \sim 1/n^a$ per $n \to \infty$ e per il teorema di Riemann–Abel la serie data è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^1_T$ per ogni $a > 0$.

(b) Poiché $\omega = \pi = 2\pi/T$, risulta $T = 2$.

(c) Sempre per il teorema di Riemann–Abel e per quanto osservato al punto (a), $f \in L^p_T$, $p > 1$, se e solo se $\sum n^{p-2} n^{-ap} < \infty$, quindi se e solo se $a > (p-1)/p$.

(d) Analogamente a (c), la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ a $f \in C_2$ se e solo se $\lim n \cdot n^{-a} = 0$, cioè se e solo se $a > 1$.

Esercizio 4. (a) L'integranda è nonnegativa e continua in $\mathbb{R}^+$, dunque basta valutare l'integrale attraverso le funzioni speciali e studiarne la convergenza. Se $\alpha < 1$ poniamo $(1-\alpha)x = t$, così

$$I(\alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)^{2(1-\alpha)}} \int_0^\infty t^{2(1-\alpha)-1} e^{-t} dt,$$

e l'ultimo integrale converge se e solo se $2(1-\alpha) > 0$, cioè $\alpha < 1$, e in questo caso $I(\alpha) = \dfrac{\Gamma(2(1-\alpha))}{(1-\alpha)^{2(1-\alpha)}}$. Se invece $\alpha \ge 1$, allora $I(\alpha) = \int_0^\infty x^{1-2\alpha} e^{(\alpha-1)} x dx \ge \int_0^\infty x^{1-2\alpha} dx = \infty$, in quanto $2\alpha - 1 \ge 1$ e $x^{1-2\alpha} \notin L^1(0^+)$.

(b) Siccome $\lim\limits_{\alpha\to 0} (1-\alpha)^{2(1-\alpha)} = 1^2 = 1$ e $\lim\limits_{\alpha\to 0} \Gamma(2(1-\alpha)) = \Gamma(2) = 1$, abbiamo $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha) = 1$.

(c) Da $\lim\limits_{\alpha\to 1^-} (1-\alpha)^{2(1-\alpha)} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{2x\log x} = 1$ e ora da $\lim\limits_{\alpha\to 1^-} \Gamma(2(1-\alpha)) = \infty$, risulta $\lim\limits_{\alpha\to 1^-} I(\alpha) = \infty$.

Esercizio 5. (a) Come somma finita di funzioni continue in $\mathbb{R}$, ogni f_n è continua in $\mathbb{R}$. Poichè il $\sin^2$ è π–periodico, ogni f_n è T_n–periodica, e il (minimo) periodo è $T_n = \text{m.c.m.}\{1, 4, ..., n^2\}\pi$.

(b) $(f_n)_n$ è la successione delle somme parziali della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2(x/n^2)$, che converge totalmente in $\mathbb{R}$ alla sua somma $f(x)$, in quanto $0 \le \dfrac{1}{n^2} \sin^2(x/n^2) \le \dfrac{1}{n^2}$ e $\dfrac{1}{n^2}$ è il termine generale di una serie numerica convergente assolutamente. In particolare, f come limite uniformente di funzioni continue, è anch'esso continuo in $\mathbb{R}$.

(c) Poichè $f_n(0) = 0$ per ogni n, da (b) abbiamo che $f(0) = 0$. Ora, fissato $x > 0$ risulta $0 < x < n^2\pi$ per ogni $n > N_x = [(x/\pi)^{1/2}]+1$, quindi, preso $n > N_x$, si ha $f(x) \ge f_n(x) \ge \dfrac{1}{n^2} \sin^2(x/n^2) > 0$. Poichè f è pari, risulta $f(x) > 0$ per ogni $x \ne 0$. Il fatto che $f(0) = 0$, mentre $f(x) > 0$ per ogni $x \ne 0$, mostra immediatamente che la funzione continua f non è periodica in $\mathbb{R}$.

* *
* *

A.A. 2008/2009 – Sessione Autunnale – 21 Dicembre 2009

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \arctan|y| + \dfrac{|x|}{1+|x|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, si chiede di:

(a) dimostrare che il problema ammette un'unica soluzione globale y;

(b) verificare che y è dispari e calcolare $\displaystyle\lim_{x\to\mp\infty} y(x)$;

(c) calcolare $y'(0)$ e la retta tangente al grafico di y in $(0, 0)$;

(d) tracciare il grafico qualitativo di y.

Esercizio 2. Data l'equazione differenziale $y'' = |y|^\alpha + y'^2$, con $\alpha > 0$, e denotata con φ una soluzione non costante dell'equazione, si chiede di dimostrare che:

(a) l'unica soluzione costante è quella nulla;

(b) se per qualche x_0 risulta $\varphi'(x_0) > 0$, allora φ non può essere definita in tutta la semiretta $[x_0, \infty)$;

(c) se per qualche x_0 risulta $\varphi'(x_0) < 0$, allora φ non può essere definita in tutta la semiretta $(-\infty, x_0]$;

(d) φ non può essere definita in tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Data la serie trigonometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos n^{-a/2}\right) \sin 2n\pi x$, $a > 0$, si chiede di:

(a) giustificare che essa è la serie di Fourier di una funzione periodica $f \in L^1_T$;

(b) determinare il periodo T;

(c) dire per quali valori di $a > 0$ risulta $f \in L^p_T$, con $p > 1$;

(d) determinare i valori $a > 0$ per i quali la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e posto $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, si chiede di:

(a) dire per quali valori di α l'integrale è convergente e calcolare $I(\alpha)$ usando le funzioni speciali;

(b) riconoscere che I è continua e positiva in $(-1, \infty)$;

(c) calcolare $I(0)$ e $I(1)$.

Esercizio 5. Siano f e g due funzioni convesse di classe $C^2(\mathbb{R})$ si chiede di dimostrare che

(a) in generale $f \circ g$ non è convessa;

(b) se f è monotona non decrescente in $\mathbb{R}$, allora $f \circ g$ è convessa.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Posto $f(x, y) = \arctan |y| + \dfrac{|x|}{1 + |x|} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, chiaramente f è continua in $\mathbb{R}^2$. Ovviamente per $y \neq 0$, risulta $\partial_y f(x, y) = \dfrac{y}{|y|(1 + y^2)}$ e dunque $|\partial_y f(x, y)| \to 1$ per $(x, y) \to (x, 0)$, cioè $f \in Lip^y(\mathbb{R}^2)$ uniformemente in x, con costante di Lipschitz 1. Ricordando che $0 \le \arctan |y| \le |y|$, addirittura $|f(x, y)| \le |y| + 1$. Quindi il problema ammette un'unica soluzione globale y.

(b) Posto $z(x) = -y(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $z'(x) = y'(-x) = \arctan |y(-x)| + \dfrac{|x|}{1 + |x|} = \arctan |z(x)| + \dfrac{|x|}{1 + |x|}$, con $z(0) = 0$. Pertanto dal teorema di unicità segue che y è dispari e che è positiva in $\mathbb{R}^+$ e negativa in $\mathbb{R}^-$, in quanto $y' \ge 0$ in $\mathbb{R}$. Dunque $y' > 0$ in $\mathbb{R}^+$ e $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$. Infatti per ogni $x > 1$ risulta $y(x) = \int_0^x y'(t)dt \ge \int_1^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}(x - 1) \to \infty$ per $x \to \infty$. Poichè y è dispari, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$.

(c) Per quanto detto al punto (b) risulta $y' > 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $y'(0) = 0$. Inoltre è facile controllare che $y'' < 0$ in $\mathbb{R}^-$ e $y'' > 0$ in $\mathbb{R}^+$ Dunque $(0, 0)$ è un punto di flesso, e $y = 0$ è l'equazione della retta tangente al grafico di y in $(0, 0)$.

(d) Ovvio.

Esercizio 2. (a) Infatti, se $y(x) \equiv c$, allora $0 = |c|^\alpha$ con $\alpha > 0$. Dunque $c = 0$.

(b) Posto $u = \varphi'$, risulta $u' \ge u^2$. In particolare $u' \ge 0$. Dunque $u(x) \ge u(x_0) > 0$ per ogni $x \ge x_0$. Ora, se per assurdo u fosse definita sull'intera semiretta $[x_0, \infty)$, risulterebbe, integrando su $[x_0, x]$, per $x > x_0$,

$$\frac{1}{u(x_0)} - \frac{1}{u(x)} \ge x - x_0, \quad \text{cioè} \quad x \le \frac{1}{u(x_0)} - \frac{1}{u(x)} + x_0 \le \frac{1}{u(x_0)} + x_0,$$

che è assurdo.

(c) Posto $\psi(x) = \varphi(-x)$, allora $\psi'(-x_0) = -\varphi'(x_0) > 0$, e $\psi''(x) = \varphi''(-x) = |\varphi(-x)|^\alpha + \varphi'^2(-x) = |\psi(x)|^\alpha + \psi'^2(x)$, cioè ψ è soluzione dell'equazione e per il punto (b) la soluzione ψ non può essere definita nell'intera semiretta $[-x_0, \infty)$, e dunque φ non può essere definita nell'intera semiretta $(-\infty, x_0]$.

(d) Se φ è una soluzione non costante dell'equazione, allora esiste x_0 tale che $\varphi'(x_0) \neq 0$, e quindi dai punti (b) e (c) discende che φ non può essere definita in tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. (a) Ovviamente $\left(1 - \cos n^{-a/2}\right) \sim 1/2n^a$ per $n \to \infty$ e per il teorema di Riemann–Abel la serie data è la serie di Fourier di una funzione $f \in L^1_T$ per ogni $a > 0$.

(b) Poiché $\omega = 2\pi = 2\pi/T$, risulta $T = 1$.

(c) Sempre per il teorema di Riemann–Abel e per quanto osservato al punto (a), $f \in L^p_T$, $p > 1$, se e solo se $\sum n^{p-2} n^{-ap} < \infty$, quindi se e solo se $a > (p-1)/p$.

(d) Analogamente a (c), la serie converge uniformente in $\mathbb{R}$ a $f \in C_1$ se e solo se $\lim n \cdot n^{-a} = 0$, cioè se e solo se $a > 1$.

Esercizio 4. (a) L'integranda è nonnegativa e continua in $\mathbb{R}^+$, dunque basta valutare l'integrale attraverso le funzioni speciali e studiarne la convergenza. Inoltre, poiché l'integranda è pari, posto $x^2 = t$, risulta

$$I(\alpha) = 2\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^1 t^{-1+(\alpha+1)/2}(1-t)^{-1+1/2}dt,$$

e l'ultimo integrale converge se e solo se $\alpha > -1$. Allora $I(\alpha) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)} = \sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)}$.

(b) Se $\alpha \in (-1, \infty)$, allora $1 + \alpha/2 > 1/2 > 0$ e per la positività di Γ e le sue proprietà, risulta $\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right) \geq \Gamma(x_{\min}) > 0$, ove $x_{\min} \in (1,2)$ è l'unico punto di minimo di Γ in $\mathbb{R}^+$. Dunque I, come rapporto di funzioni continue e positive, è continua e positiva in $(-1, \infty)$.

(c) Per (b) abbiamo $I(0) = \sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \pi$, mentre $I(1) = \sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma(1)}{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)} = 2$.

Esercizio 5. (a) Le funzioni $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = x^2$ sono due funzioni strettamente convesse di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, ma $f \circ g(x) = e^{-x^2}$ non è convessa.

(b) Chiaramente $h = f \circ g$ è di classe $C^2(\mathbb{R})$ e poiché una funzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ è convessa se e solo se $h'' \geq 0$, basta calcolare $h''(x) = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x) \geq 0$, essendo f, g convesse e $f'(g(x)) \geq 0$ per la non decrescenza di f in $\mathbb{R}$. Questo conclude la prova.

* *
* *

A.A. 2009/2010 – 3 Febbraio 2010

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2 - x^2 - 1} \\ y(0) = 2 \end{cases}$, si chiede di dimostrare che:

(a) il problema ammette un'unica soluzione y monotona crescente in $I_{\max} = (\alpha, \beta)$;

(b) $\alpha > -\sqrt{3}$ e calcolare $\lim\limits_{x\to\alpha^+} y'(x)$;

(c) $\beta = \infty$ e calcolare $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

Esercizio 2. Sia data la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, si chiede di:

(a) mostrare per induzione che $\mathbb{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$;

(b) calcolare $e^{\mathbb{A}x}$ utilizzando (a);

(c) dire per quali $Y_0 \in \mathbb{R}^2$ la soluzione Y del problema di Cauchy $Y'(x) = \mathbb{A}Y(x)$, $Y(0) = Y_0$, ha la proprietà che $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}Y(x) = 0$.

Esercizio 3. Si chiede di dimostrare che:

(a) $\Gamma(2) = \displaystyle\int_0^\infty n^2 t e^{-nt} dt$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t e^{-nt} dt = \int_0^\infty t \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} dt$;

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1} dt = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, utilizzare (a) e (b).

Esercizio 4. Sia data la serie trigonometrica $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin(nx)}{2^n}$ si chiede di:

(a) giustificare che è la serie di Fourier di f, che $f \in C_T$ e determinare T;

(b) mostrare che f è analitica in $\mathbb{R}$;

(c) calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{e^{inx}}{2^n}$;

(d) calcolare esplicitamente $f(x)$, utilizzando (c).

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si chiede di:

(a) dimostrare che esiste $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$;

(b) dare un esempio di f in cui $\ell = -1$;

(c) dare un esempio di f in cui $\ell = \infty$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2 - x^2 - 1}$ è $C^\infty(\Omega)$, dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 - x^2 \neq 1\}$, cioè in ciascuna delle tre regioni in cui il piano viene diviso dall'iperbole equilatera di equazione $y^2 - x^2 - 1 = 0$. Poiché $y(0) > 1$ il problema ammette un'unica soluzione massimale $y = y(x)$ in $I_{\max}$ per il teorema di esistenza e unicità. La soluzione vive nella regione $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > \sqrt{x^2+1}\}$ in cui $f(x,y) > 0$ e quindi $y(x)$ è monotona crescente.

(b) Dalla monotonia di $y(x)$ segue che $\sqrt{x^2+1} < y(x) < 2$ per $x < 0$. Quindi ogni $x \in (\alpha, 0)$ deve soddisfare la disequazione $\sqrt{x^2+1} < 2$, cioè $x > -\sqrt{3}$. Pertanto risulta $\alpha > -\sqrt{3}$. Sempre per la monotonia esiste $\lim\limits_{x\to\alpha^+} y(x) = \ell_1 \geq \sqrt{\alpha^2+1}$. Deve essere $\ell_1 = \sqrt{\alpha^2+1}$ altrimenti la soluzione potrebbe essere prolungata a sinistra di α, contraddicendo la minimalità di α. Quindi risulta $\lim\limits_{x\to\alpha^+} y'(x) = \infty$.

(c) Si può escludere $\beta < \infty$ con il seguente ragionando per assurdo. Se fosse $\beta < \infty$, allora si avrebbe $\lim\limits_{x\to\beta^-} y(x) = \ell_2 \geq \sqrt{\beta^2+1}$. Distinguiamo tre casi:

1) se $\ell_2 = \sqrt{\beta^2+1}$, dall'equazione risulterebbe $\lim\limits_{x\to\beta^-} y'(x) = \infty$, mentre, posto $y(\beta) = \sqrt{\beta^2+1}$, $y(x)$ è continua in $(\alpha, \beta]$ e per ogni $x \in (0,\beta)$ esiste $x < \xi_x < \beta$ tale che $y'(\xi_x) = \dfrac{y(\beta) - y(x)}{\beta - x} \leq \dfrac{\sqrt{\beta^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{\beta - x}$. Quindi $\liminf_{x\to\beta^-} y'(x) \leq \dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} < \infty$, ottenendo una contraddizione;

2) se $\ell_2 \in (\sqrt{\beta^2+1}, \infty)$, la soluzione sarebbe prolungabile in un intorno destro di β e ciò contraddirebbe la massimalità di β;

3) se $\ell_2 = \infty$, la retta $x = \beta$ risulterebbe un asintoto verticale per la soluzione e il massimo limite per $x \to \beta^-$ della derivata è infinito. Dall'equazione risulterebbe invece che $\lim_{x\to\beta^-} y'(x) = 0$. Anche questo caso è dunque impossibile.

In conclusionem, $\beta = \infty$ da cui segue subito che $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$ poiché $y(x) > \sqrt{1+x^2}$.

Esercizio 2. (a) Si dimostra per induzione osservando che $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$ e $\mathbb{A}^{k+1} = \mathbb{A}\mathbb{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Si ha $e^{\mathbb{A}x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \dfrac{x^k}{k!} & 0 \\ \dfrac{kx^k}{k!} & \dfrac{x^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{bmatrix}$.

(c) L'integrale generale è $Y(x) = e^{\mathbb{A}x} Y_0$. Sia $Y_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Allora $Y(x) = \begin{bmatrix} c_1 e^x \\ c_1 x e^x + c_2 e^x \end{bmatrix}$, da cui si vede subito che $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} Y(x) = 0$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$.

Esercizio 3. (a) Il cambio di variabile $x = nt$ fornisce $\displaystyle\int_0^\infty n^2 t e^{-nt} dt = \int_0^\infty x e^{-x} dx = \Gamma(2)$. Lo stesso risultato si può ottenere in modo elementare osservando che $\Gamma(2) = 1$ e integrando per parti.

(b) Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo la funzione $f_m(t) = \sum_{n=1}^m t e^{-nt}$ per $t \in \mathbb{R}^+$, $f_m(0) = 0$. Ogni f_m è continua e non–negativa in $\mathbb{R}_0^+$ e la successione $(f_m)_{m=1}^\infty$ è crescente in $\mathbb{R}_0^+$. Pertanto, dal teorema di convergenza monotona di Beppo–Levi, segue che $\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty f_m(t)dt = \int_0^\infty \lim_{m\to\infty} f_m(t)dt$, cioè

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty \sum_{n=1}^m te^{-nt}dt = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty te^{-nt}dt.$$

D'altra parte, usando la linearità dell'integrale e la definizione di serie, possiamo riscrivere il primo membro in questo modo

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty \sum_{n=1}^m te^{-nt}dt = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^m \int_0^\infty te^{-nt}dt = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty te^{-nt}dt$$

e concludere.

(c) Osserviamo che, facendo il cambio di variabile $s = nt$, si ha

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty te^{-nt}dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\int_0^\infty se^{-s}ds = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

D'altra parte

$$\int_0^\infty t\sum_{n=1}^\infty e^{-nt}dt = \int_0^\infty t\left(\sum_{n=0}^\infty (e^{-t})^n - 1\right)dt = \int_0^\infty t\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - 1\right)dt = \int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}dt$$

Si conclude usando la (b).

Esercizio 4. (a) Segue immediatamente dal teorema di Abel–Dirichlet, in quanto la serie converge totalmente a f. Inoltre $T = 2\pi$.

(b) Poiché $a_n(f) = 0$ e $b_n(f) = 2^{-n}$, esiste $c = 1/2 \in (0,1)$ tale che $a_n(f) = O(c^n)$ e $b_n(f) = O(c^n)$ e dunque f è analitica in $\mathbb{R}$.

(c) Poiché $\left|\frac{e^{ix}}{2}\right| < 1$ la serie è geometrica e vale $\sum_{n=0}^\infty \frac{e^{inx}}{2^n} = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{1-e^{ix}/2}$.

(d) Si osserva che $\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin(nx)}{2^n} = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{e^{inx}}{2^n}\right) = 2\operatorname{Im}\left(\frac{2-e^{-ix}}{(2-e^{ix})(2-e^{-ix})}\right) = \frac{2\sin x}{5-4\cos x}$, cioè $f(x) = \frac{2\sin x}{5-4\cos x}$ per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. (a) La funzione $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ è monotona non–decrescente a destra di 0. Dunque ammette limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Ovviamente $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{f(0)}{x}$ ammette lo stesso limte ℓ per $x \to \infty$.

(b) $f(x) = -x$ essendo lineare è convessa in $\mathbb{R}$ e risponde alla domanda.

(c) $f(x) = e^x$ è strettamente convessa in $\mathbb{R}$ e risponde alla domanda.

A.A. 2009/2010 – 22 Febbraio 2010

Esercizio 1. Sia y la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{1+x^2+y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$, si chiede di dimostrare che:

(a) la soluzione y è unica e globale;

(b) la soluzione y è positiva, pari e $y(x) < x$ per ogni $x > 1$;

(c) $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ e $x = 0$ è un punto di minimo assoluto stretto per la soluzione y;

(d) $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 1$, mostrando dapprima che $y'' > 0$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} u' = e^{v-u}, & u(0) = 1 \\ v' = e^{u-v}, & v(0) = 1 \end{cases}$, si chiede di:

(a) determinare esplicitamente la soluzione massimale (u, v), utilizzando il cambiamento di variabile $w = u - v$;

(b) dimostrare che la soluzione (u, v) trovata è unica e globale.

Esercizio 3. Sia $\mathscr{I}(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^t(1+x)}$, $t \in \mathbb{R}$, si chiede di:

(a) determinare $I = \{t \in \mathbb{R} : \mathscr{I}(t) < \infty\}$ ed esprimere $\mathscr{I}$ in termini della funzione Γ;

(b) dimostrare che $\mathscr{I} : I \to \mathbb{R}$ è derivabile e calcolane la derivata in funzione di Γ e Γ';

(c) calcolare $\mathscr{I}(1/2)$.

Esercizio 4. Sia data la serie trigonometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\alpha} \cos(nx)$, $\alpha \in (0, 1]$, si chiede di:

(a) dire per quali $p = p(\alpha) > 1$ è la serie di Fourier di $g \in L^p_T$ e determinare T;

(b) mostrare che per $\alpha = 1$ è la serie di Fourier di $g \in L^1_T$.

Esercizio 5. Sia $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ove $f_n \in C^1(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, $f'_{n+1} = f_n$, $n = 2, 3, \ldots$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Si chiede di:

(a) dimostrare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$;

(b) determinare φ in funzione di f_1, sapendo che $\varphi(0) = f_1(0)$.

N.B. Giustificare tutte le risposte!

Risoluzione

Esercizio 1. (a) Qui $f(x,y) = 2xy/(1+x^2+y^2)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dunque il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione massimale per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Inoltre $|f(x,y)| \le \dfrac{2|x|\cdot|y|}{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ and $f(0,0) = 0$, cioè $|f(x,y)| \le 1$ in $\mathbb{R}^2$. Quindi la soluzione massimale del nostro problema è globale.

(b) Poiché l'equazione ammette la soluzione banale $\varphi \equiv 0$, ne consegue che la nostra soluzione y rimane positiva in tutto $\mathbb{R}$. In particolare $y(0) = y_0 > 0$.

Ora posto $z(x) = y(-x)$, risulta $z(0) = y(0) = y_0$ e $z'(x) = -y'(-x) = 2xy(-x)/[1+x^2+y^2(-x)] = 2xz(x)/[1+x^2+z^2(x)]$. Dunque dal teorema di unicità globale segue che $z \equiv y$ in $\mathbb{R}$, cioè y è pari in $\mathbb{R}$.

Inoltre $\psi(x) = x$ è tale che $\psi(1) = 1$ e $1 = \psi'(x) > 2xy(x)/[1+x^2+y^2(x)]$ se $x > 1$ per il punto (a). Dunque dal teorema del confronto $y(x) < x$ per ogni $x > 1$.

(c) Da (b) per $x > 1$ abbiamo in particolare $y'(x) \ge 2xy(x)/(1+2x^2)$, da cui integrando su $[1,x]$ abbiamo $\log y(x) \ge \log\sqrt{(1+2x^2)/3}$, cioè $y(x) \ge \sqrt{(1+2x^2)/3}$ per ogni $x \ge 1$. Quindi $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$. Inoltre, $x = 0$ è un punto di minimo assoluto stretto per la soluzione y, in quanto da (b) abbiamo che $y' > 0$ in $\mathbb{R}^+$, $y' < 0$ in $\mathbb{R}^-$ e $y'(0) = 0$.

(d) Dall'equazione abbiamo

$$\begin{aligned} y'' &= 2\frac{(y+xy')(1+x^2+y^2) - xy(2x+2yy')}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\left\{y(1+x^2+y^2) - \frac{4x^2y^3}{1+x^2+y^2}\right\} \\ &= \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^3}\left\{(1+x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2\right\} = \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^3}\left\{1+2x^2+2y^2+(x^2-y^2)^2\right\} > 0. \end{aligned}$$

Quindi y' è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e da (a) segue che $\lim_{x\to\infty} y'(x) = A$, con $A \in (0,1]$. Dunque, da (c) e dalla regola di de l'Hôpital, otteniamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{y(x)} = \frac{1}{A} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = A.$$

In definitiva risulta

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{2xy(x)}{xy(x)\left(\dfrac{1}{xy(x)} + \dfrac{x}{y(x)} + \dfrac{y(x)}{x}\right)} = \frac{2}{\dfrac{1}{A} + A} = \frac{2A}{1+A^2},$$

cioè $A = 1$.

Esercizio 2. (a) Qui $F(u,v) = (e^{v-u}, e^{u-v})$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e il sistema è autonomo. Quindi il problema ammette unica soluzione massimale per ogni dato. Posto $w = u - v$, risulta $w(0) = u(0) - v(0) = 0$ e $w' = u' - v' = e^{v-u} - e^{u-v} = e^{-w} - e^w = f(w)$, con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $f(w) > 0$ per ogni $w < 0$ e $f(w) < 0$ per ogni $w > 0$. Dunque il problema ammette unica soluzione massimale $w \equiv 0$, che è chiaramente globale. Pertanto $u(x) = v(x)$ per ogni $x \in I_{\max}$. Quindi $u' = e^{v-u} = e^0 = 1$, cioè per diretta integrazione $(u(x), v(x)) = (x+1, x+1)$.

(b) Da (b) segue immediatamente che $I_{\max} = \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (a) Chiaramente la funzione integranda f è positiva e $f \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Dunque basta calcolare l'integrale e vedere per quali $t \in \mathbb{R}$ converge. Ora, posto $1 + x = 1/s$, da cui

$dx = -ds/s^2$, abbiamo $\mathscr{I}(t) = \displaystyle\int_0^1 s^{t-1}(1-s)^{1-t-1}ds = B(t, 1-t)$. Pertanto deve essere $t > 0$ e $1 - t > 0$, cioè $I = (0, 1)$. Quindi $\mathscr{I}(t) = \Gamma(t)\Gamma(1-t)$ in I.

(b) Essendo $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ e $t \mapsto 1 - t \in C^\infty(\mathbb{R})$, certamente $\mathscr{I} \in C^\infty(I)$, e dunque derivabile. Inoltre, dalla formula di Leibnitz, risulta $\mathscr{I}'(t) = \Gamma'(t)\Gamma(1-t) - \Gamma(t)\Gamma'(1-t)$ in I.

(c) $\mathscr{I}(1/2) = \Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = \pi$.

Esercizio 4. (a) Ovviamente $a_n \searrow 0$ per $n \to \infty$, essendo $(a_n)_{n=3}^\infty$ strettamente monotona decrescente, e $T = 2\pi$. Quindi la serie assegnata è la serie di Fourier di $g \in \mathscr{M}_{2\pi}$ e converge puntuamente a g in $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Inoltre $\sum n^{p-2}a_n^p = \sum(\log n)^{\alpha p}n^{p-2-\alpha p} < \infty$ se e solo se $p - 2 - \alpha p < -1$, cioè per ogni $p > 1$ se $\alpha = 1$, altrimenti deve essere $p < 1/(1-\alpha)$. Nota che $1/(1-\alpha) > 1$, essendo $\alpha \in (0, 1)$. Quindi in questi casi la convergenza a g è in $L^p_{2\pi}$.

(b) Se $\alpha = 1$, abbiamo che la funzione $x \mapsto (\log x)/x$ è di classe $C^\infty[1, \infty)$, con $[(\log x)/x]' = (1 - \log x)/x^3 < 0$ per $x > e$, e $[(\log x)/x]'' = (2 \log x - 3)/x^3 > 0$ se $x > e^{3/2}$. Quindi $(a_n)_{n=5}^\infty$ è infinitesima, decrescente e convessa. Infine, $a_n \log n = (\log n)^2/n \to 0$ per $n \to \infty$. Pertanto la serie assegnata converge a g in $L^1_{2\pi}$ se $\alpha = 1$.

Esercizio 5. (a) Dalle ipotesi segue che sia $\sum_{n=1}^\infty f_n'$ che $\sum_{n=1}^\infty f_n$ convergono uniformemente in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Quindi la somma puntuale φ è di classe $C^1(\mathbb{R})$, essendo $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ e $\varphi'(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ in virtù del teorema di derivazione per serie.

(b) Ora $\varphi' = f_1' + \sum_{n=2}^\infty f_n' = f_1' + \sum_{k=1}^\infty f_{k+1}' = f_1' + \sum_{k=1}^\infty f_k = f_1' + \varphi$. Quindi φ verifica in $\mathbb{R}$ un'equazione differenziale lineare del I ordine completa. Pertanto per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= e^x \left(f_1(0) + \int_0^x e^{-t} f_1'(t)dt \right) = e^x \left(f_1(0) + e^{-x} f_1(x) - f_1(0) + \int_0^x e^{-t} f_1(t)dt \right) \\ &= f_1(x) + \int_0^x e^{x-t} f_1(t)dt.\end{aligned}$$